Jour 8

Cours 1 :

1. La famille $(u_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de vecteurs de E est dite libre si $\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$
$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

2. La famille $(u_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de vecteurs de E est génératrice de E si tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des (u_i) (i.e $E = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$)

3. La famille $(u_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de vecteurs de E est une base de E si elle est libre et génératrice de E.
La famille $(u_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de F sev de E si elle est composée de vecteurs de F et si elle est libre et génératrice de F.

4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{L}$ une famille libre de E.
On peut compléter $\mathcal{L}$ en une base de E (en prenant des vecteurs d'une famille génératrice de notre choix).

5. Dans un espace de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre est appelé dimension de E.

Exercice 2 :

1. Oui (non vide et stable par combinaison linéaire)
2. Oui $F = \mathrm{Vect}(X^3+1,\ X^2+1)$
3. Oui $F = \mathrm{Vect}(I_3, A_1, A_2)$ avec $A_1 = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$
4. Oui F est non vide (contient la fonction nulle)
et stable par combinaison linéaire $\forall(f,g)\in F^2\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda f+g\in C^0([0,1],\mathbb{R})$
et par linéarité de l'intégrale $\int_0^1 t(\lambda f+g)(t)\,dt = \lambda\underbrace{\int_0^1 tf(t)\,dt}_{=0 \text{ car } f\in F} + \underbrace{\int_0^1 tg(t)\,dt}_{=0 \text{ car } g\in F} = 0$

donc $\lambda f+g\in F$

Exercice 3 :

1. Utilisons la définition : Soit $(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ / $\lambda(1,1,-2)+\mu(-1,2,1)+\gamma(-1,-9,-6) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda-\mu-\gamma=0\\ \lambda+2\mu-9\gamma=0\\ -2\lambda+\mu-6\gamma=0\end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3+2L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\lambda-\mu-\gamma=0\\ 3\mu-8\gamma=0\\ -\mu-8\gamma=0\end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\mu=0\\ \gamma=0\\ \lambda=0\end{cases}$

<u>La famille est libre</u>.

2. Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ / $\alpha f_1+\beta f_2+\gamma f_3 = 0$. On a donc $\forall x\in\mathbb{R}\quad \alpha e^x+\beta e^{2x}+\gamma\ln x = 0 \quad (1)$

1ère méthode : On évalue en trois points distincts pour obtenir un système

2ème méthode On utilise les limites des fonctions :

On a $\lim_{x\to0} \alpha e^x+\beta e^{2x}+\gamma\ln x = \alpha+\beta+\lim_{x\to0}\gamma\ln x = \pm\infty$ si $\gamma\neq0$ on a donc une contradiction avec (1) donc $\gamma = 0$. et $\forall x > 0$ $\alpha e^x + \beta e^{2x} = 0 \iff \alpha + \beta e^x = 0$ car $e^x \neq 0$

en passant à la limite quand x tend vers $+\infty$, on a $\beta = 0$ donc $\alpha = 0$

et la famille est libre

Exercice 5:

1. Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et que le cardinal de B_1 et B_2 est 3, il suffit de montrer que les familles ~~sont~~ libres (à détailler)

Autre méthode: On écrit la matrice de la famille B_1 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on montre qu'elle est de rang 3. Pour cela, on échelonne la matrice et on compte le nombre de pivot, ici on trouve $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ la matrice est donc de rang 3 et B_1 est une base.

2. Trouver les coordonnées de $u = (x, y, z)$ dans B_1 revient à chercher a, b, c tels que

$$u = a(1,1,1) + b(1,-1,1) + c(1,1,-1) \iff \begin{cases} a+b+c = x \\ a-b+c = y \\ a+b-c = z \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2}(y+z) \\ b = \frac{1}{2}(x-y) \\ c = \frac{1}{2}(x-z) \end{cases}$$

$\boxed{\text{Les coordonnées de } u \text{ dans } B_1 \text{ sont } \left(\frac{1}{2}(y+z), \frac{1}{2}(x-y), \frac{1}{2}(x-z)\right)}$

De la même manière, $\boxed{\text{les coordonnées de } u \text{ dans } B_2 \text{ sont } \left(\frac{1}{2}(x+y-z), \frac{1}{2}(x-y+z), \frac{1}{2}(-x+y+z)\right)}$.

Exercice 6:

1. (u_1) est un vecteur non nul de E, donc la famille (u_1) est libre dans E.
Pour compléter (u_1) en une base de E qui est de dimension 2, il suffit de trouver un vecteur u_2 non colinéaire à u_1, par exemple $u_2 = (1,0)$
(u_1, u_2) est une base de E.

2. Les deux vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, la famille (u_1, u_2) est libre.
Soit $u_3 = (0,0,1)$ alors (u_1, u_2, u_3) est une famille libre (échelonnée) de 3 vecteurs c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$ (qui est de dimension 3).

3. (P_1, P_2) est échelonnée en degré, elle est donc libre.
Pour compléter (P_1, P_2) en une base de E qui est de dimension 3, on cherche un polynôme P_3 qui n'est pas combinaison linéaire de P_1 et P_2. Ici $P_3 = 1$ convient car (P_1, P_2, P_3) est échelonnée en degré donc libre dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3 et contient 3 vecteurs c'est donc une base de E.

$(X^2 + X - 1, X, 1)$.

4. Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ / $\lambda A_1+\mu A_2=0$. On a donc en travaillant coefficient par coefficient :

$$\begin{cases}\lambda+2\mu=0\\ \mu=0\\ \lambda+\mu=0\end{cases} \Rightarrow \lambda=0 \text{ et } \mu=0$$

La famille est libre dans E.

On doit compléter une famille libre de deux vecteurs dans un espace E de dimension 4.
On cherche donc deux matrices A_3 et A_4.

Soit M la matrice dont les lignes sont les coordonnées de A_1 et A_2 dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ (il s'agit de la transposée de la matrice de la famille (A_1,A_2) dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$)

$M=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\2&0&1&1\end{pmatrix}$. On échelonne M : $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$ et on complète par deux lignes qui donnent une matrice carrée inversible $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&1&-1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, on obtient $A_3=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ et

$A_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\boxed{(A_1,A_2,A_3,A_4) \text{ est une base de } E}$

5. u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires donc (u_1,u_2) est une famille libre.
On doit compléter une famille libre de deux vecteurs dans un espace de dimension 4.
On cherche donc deux vecteurs u_3 et u_4. On procède comme avant.
Soit M la transposée de la matrice de la famille (u_1,u_2) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$: $M=\begin{pmatrix}-1&1&2&1\\2&3&1&-4\end{pmatrix}$. On l'échelonne pour obtenir :
$\begin{pmatrix}-1&1&2&1\\0&5&5&-2\end{pmatrix}$ et on complète par deux lignes pour avoir une matrice inversible.
Par exemple $\begin{pmatrix}-1&1&2&1\\0&5&5&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ on obtient donc $u_3=(0,0,1,0)$ et $u_4=(0,0,0,1)$

$\boxed{\text{La famille } (u_1,u_2,u_3,u_4) \text{ est une base de } E}$

Cours 1

1. $f \underset{a}{\sim} g$: il existe η une fonction définie ~~dans~~ un voisinage V de a telle que :

$$\forall x \in V \quad f(x) = \eta(x) g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \eta(x) = 1.$$

dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de a : $f \underset{a}{\sim} g \iff \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

2. • on ne peut pas sommer ou soustraire des equivalents
 • on peut multiplier ou diviser des equivalents.
 • on ne peut pas passer à la puissance si celle-ci dépend de la variable
 • on ne peut pas passer à l'exponentielle sur un équivalent.
 • on ne peut pas passer au logarithme sur un equivalent (sauf si les fonctions ont une limite differente de 1 : à savoir reprouver).

Exercice 2 :

1 a) $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ b) $\sin x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$

2 a) On divise par x^2, il faut donc utiliser un DL à l'ordre 5 de sin en 0 :

$$\boxed{\frac{\sin(x) - x}{x^2} = -\frac{x}{6} + \frac{x^3}{120} + o(x^3).}$$

b) On utilise un $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$ car le x du numérateur nous ramènera à une forme $\frac{1}{1-u}$ avec u proche de 0.

$$\frac{x}{\ln(1+x)} = \frac{x}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}$$

On pose $u = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)$, on a $\lim_{x \to 0} u = 0$ et $\frac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1 + u + u^2 + o(u^2)$

et $o(u^2) = o(x^2)$ d'où :

$$\frac{x}{\ln(1+x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2) + \frac{x^2}{4} = \boxed{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)}$$

c) e^x et $\frac{1}{x}\ln(1+x)$ sont equivalent à 1 en 0, on va donc faire un DL à l'ordre 1

$e^x = 1 + x + o(x)$ et $\frac{1}{x}\ln(1+x) = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ donc $e^x - \frac{1}{x}\ln(1+x) = \frac{3}{2}x + o(x)$

et $\boxed{e^x - \frac{1}{x}\ln(1+x) \sim \frac{3}{2}x}$

Exercice 3 :

1 a) $\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ b) $\cos x \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$

2a) On part d'un DL à l'ordre 2 de $\cos u$ pour avoir un DL à l'ordre 5 de $x\cos(x^2)$:

$$x\cos x^2 = x\left(1-\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right) = x - \frac{x^5}{2}+o(x^5)$$

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$$

$$\boxed{x\cos(x^2)-(e^x-1) = -\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}-\frac{61}{120}x^5+o(x^5)}$$

b) On utilise un DL à l'ordre 4 en 0 de $\cos x - 1$. Le premier terme étant en x^2, on utilisera un DL à l'ordre 2 de $\frac{1}{1-x}$ en 0.

$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$ et $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+o(x^2)$

$$\boxed{\frac{\cos x - 1}{1-x} = -\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}-\frac{11}{24}x^4+o(x^4)}$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ et on utilise le DL en 0 de $\frac{1}{1+u}$. Le 1er terme est 1 qui se simplifie avec -1, le 2ème est $-\frac{2}{x}$ qui se simplifie avec $\frac{2}{x}$, on va donc faire un DL à l'ordre 2 en 0 de $\frac{1}{1+u}$ avec $u = 2/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

$\frac{1}{1+2/x} - 1 + \frac{2}{x} = \frac{4}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc $\boxed{\frac{1}{1+2/x}-1+\frac{2}{x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{x^2}}$

Exercice 4 :

1 a) $\frac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} 1-x^2+x^4+o(x^4)$ b) $\arctan x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3}+o(x^3)$

2 a) $\operatorname{sh} x \sim x$, on utilise donc un $DL_3(0)$ de $\operatorname{ch} x - 1$. $\operatorname{ch}(x)-1 \underset{0}{=} \frac{x^2}{2}+o(x^3)$

$\frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{x}\frac{1}{1-x^2/6+o(x^2)}$ et on pose $u = -\frac{x^2}{6}+o(x^2) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et on utilise $\frac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1+u+o(u)$ $(o(u)=o(x^2))$

on obtient : $\boxed{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} \underset{0}{=} \frac{x}{2}+o(x^2)}$

b) On va utiliser un $DL_3(0)$ de $\ln(1+u)$ et un $DL_4(0)$ de $\frac{1}{1+x^2}$.

On obtient : $\boxed{x\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)-\left(\frac{1}{1+x^2}-1\right) \underset{0}{=} \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{8}-\frac{25}{24}x^2+o(x^4)}$

c) $\frac{1}{x}\ln(1+x) = \frac{1}{x}\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\ln x}{x}+\frac{\ln(1+1/x)}{x}$

On va donc utiliser un $DL_1(0)$ de $\ln(1+u)$ avec $u = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

donc $\boxed{\frac{1}{x}\ln(1+x)-\frac{\ln x}{x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}}$

Exercice 1

1. $u=(x,y,z)\in F \iff x=2y-z \iff u=y(2,1,0)+z(-1,0,1)$

$F=\mathrm{Vect}(a,b)$ avec $a=(2,1,0)$ et $b=(-1,0,1)$ (a,b) est une famille libre car les deux vecteurs sont non colinéaires donc (a,b) est une base de F.

F est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

La famille (a,b,c) avec $c=(0,0,1)$ est libre (à vérifier) donc $F'=\mathrm{Vect}(c)$ est un supplémentaire de F dans E

2. $(x,y,z)\in G \iff \exists\, \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha+2\beta \\ z=\alpha-\beta\end{cases} \iff \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \begin{cases}\alpha=x\\ \beta=x-z \\ y=x+2(x-z)=3x-2z\end{cases}$

$G=\mathrm{Vect}((1,1,1),(0,2,-1))=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, 3x-y-2z=0\}$

3. H est de dimension 1, c'est donc une droite, on le décrit comme l'intersection de deux plans (il y a une infinité de façons de le faire).

$(x,y,z)\in H \iff \exists t\in\mathbb{R} \,/\, \begin{cases}x=-t\\ y=t\\ z=2t\end{cases} \iff \exists t\in\mathbb{R} \,/\, \begin{cases} x=-t\\ y=-x \\ z=-2x\end{cases}$

$H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x+y=0 \text{ et } z+2x=0\}$

H est de dimension 1, Pour trouver deux supplémentaires, il suffit de trouver deux plans vectoriels ne contenant pas H, donc ne contenant pas $(-1,1,2)$

Par exemple $H_1=\{(x,y,z) \,/\, x=0\}$ et $H_2=\{(x,y,z)\,/\,y=0\}$.

Exercice 2 :

1. Base de F : $(1, X^2+X)$ (libre échelonnée et génératrice) $\Rightarrow F$ est de dimension 2.

Supplémentaire de F :

On cherche dans $\mathbb{R}_2[X]$ (qui est de dimension 3), un vecteur qui permet de compléter cette famille libre en une base de E. X convient car $(1, X^2+X, X)$ est libre (échelonnée en degré) et de cardinal 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Un supplémentaire de F dans E est $\mathrm{Vect}(X)$

2. On connait déjà une famille génératrice de G. Il reste à voir si elle est libre.

Soit M la matrice de la famille dans la base canonique : $M=\begin{pmatrix}1&-1&5\\2&0&6\\1&1&1\end{pmatrix}$

On échelonne cette matrice pour connaître son rang, on trouve $\mathrm{rg}\, M=2$, donc la famille n'est pas libre. Or les deux premiers polynômes forment une famille libre (ils ne sont pas colinéaires). Donc $G=\mathrm{Vect}((X+1)^2, X^2-1)$ et $((X+1)^2, X^2-1)$ est une base de G.

Remarque : On a $X^2+6X+5=3(X+1)^2-2(X^2-1)$.

3. $H = \{aX^2 + b, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 3

1) On a $F = \mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3)$ avec $A_1 = I_3$ $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

De plus cette famille est libre (à vérifier via la définition)

(A_1, A_2, A_3) est une base de F

2). G est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie donc G est de dimension finie.

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$ donc $\forall k \geq 3$ $A^k = 0$

donc $G = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$ et la famille génératrice (I_3, A, A^2) est libre donc (I_3, A, A^2) est une base de G.

On cherche une deuxième base. On a $\dim G = 3$, il faut donc une famille libre de trois vecteurs de G. Les matrices de G sont de la forme $M = aI_3 + bA + cA^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

On peut prendre (I_3, B_1, B_2) avec $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4:

On procède par analyse-synthèse: Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$

analyse: Supposons qu'il existe $A \in F$ et $B \in G$ tel que $M = A + B$ (1)

on a alors ${}^tM = {}^tA + {}^tB = A - B$ (2) Il faut maintenant écrire A et B seulement en fonction de M.

$\frac{(1)+(2)}{2}$: $A = \frac{M + {}^tM}{2}$

$\frac{(1)-(2)}{2}$: $B = \frac{M - {}^tM}{2}$

On a donc unicité de la décomposition.

synthèse (On vérifie que la décomposition précédente est bonne)

Soit $A = \frac{M + {}^tM}{2}$ et $B = \frac{M - {}^tM}{2}$

On a bien $A + B = M$ et ${}^tA = \frac{{}^t(M + {}^tM)}{2} = \frac{{}^tM + M}{2} = A$ donc $A \in F$

${}^tB = \frac{{}^t(M - {}^tM)}{2} = \frac{{}^tM - M}{2} = -\frac{M - {}^tM}{2} = -B$ $B \in G$.

On a donc bien existence d'une décomposition.

Finalement F et G sont supplémentaires dans E

Jour 11

Cours 1 :

1. suite géométrique de raison q : $\forall n \quad u_n = u_0 q^n$ ou encore $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = q u_n$

suite arithmétique de raison q : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + qn$ ou encore $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = q + u_n$

suite ~~arithmétique~~ géométrique : $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = a u_n + b$

2. Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q : si $q \neq 1$ alors $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

3. a) Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique.

On commence par chercher α tel que $\alpha = 2\alpha - 8$, on trouve $\alpha = 8$

puis, on pose $v_n = u_n - \alpha \ (= u_n - 8) \ \forall n \in \mathbb{N}$ et on vérifie que $(v_n)_n$ est une suite géométrique :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 8 = 2u_n - 16 = 2(u_n - 8) = 2v_n$

$(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison 2 donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 2^n$
$= (u_0 - 8) 2^n = -2^{n+2}$

et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n + 8 = 8 - 2^{n+2}}$

b) $(u_n)_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

On étudie l'équation caractéristique associée : $x^2 - 2x + 2 = 0$

$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$

Les solutions de l'équation caractéristique sont : $r_\pm \ \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i = \sqrt{2} e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$

et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sqrt{2}^n (\alpha \cos n\frac{\pi}{4} + \beta \sin n\frac{\pi}{4})$

Or $u_0 = 2 = \alpha$ et $u_1 = 0 = \sqrt{2}(\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta \frac{\sqrt{2}}{2})$

$\Rightarrow \alpha = 2$ et $\beta = -\alpha = -2$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^{1+n/2} (\cos n\frac{\pi}{4} - \sin n\frac{\pi}{4})}$

Exercice 2

1. Commençons par étudier $f : x \mapsto \frac{x-4}{x-3}$. f est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3,4\} \quad f'(x) > 0$

donc f est strictement croissante sur $]-\infty, 3[$. De plus $f(2) = 2$ donc $\forall x < 2 \quad f(x) < 2$. (1)

Montrons par récurrence H_n : "U_n est définie et $U_n < 2$" $\forall n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $U_0 = 1 < 2$ donc H_0 est vérifiée.

Hérédité : Supposons H_n vérifiée

On a $U_n < 2$ donc $U_{n+1} = f(U_n)$ est défini et $f(U_n) < 2$ d'après (1).

donc $U_{n+1} < 2$ et H_{n+1} est vérifiée.

On a donc montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ U_n est défini et $U_n < 2$.

2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1} - 2} = \frac{1}{\frac{U_n - 4}{U_n - 3} - 2} = \frac{U_n - 3}{U_n - 4 - 2U_n + 6} = \frac{U_n - 3}{-U_n + 2} = \frac{U_n - 3}{-(U_n - 2)} = -1 + \frac{1}{U_n - 2}$

$= -1 + v_n$

; $(V_n)_n$ est donc une suite arithmétique de raison -1.

3) On a donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = -n + V_0 = -(n+1)$

et $U_n = 2 + \frac{1}{V_n} = 2 - \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 2}$

Exercice 3

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$

initialisation : $u_0 = 1 > 0$

hérédité : Supposons $u_n > 0$ alors $u_n e^{-u_n} > 0$ donc $u_{n+1} > 0$

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} < 1$ car $u_n > 0$ (et exp est croissante)

et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$ et $\boxed{(u_n)_n \text{ est décroissante}}$

2. On a montré à la question précédente que $(u_n)_n$ est décroissante et minorée, elle est donc convergente vers ℓ.

En passant à la limite dans $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ (par continuité de exp),

on a $\ell = \ell e^{-\ell} \Leftrightarrow \ell(1 - e^{-\ell}) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$

donc $\boxed{(u_n)_n \text{ converge vers } 0}$

3. On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n}$ En faisant le produit de ces expressions,

on obtient : $\prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \prod_{k=0}^{n} e^{-u_k} = e^{-\sum_{k=0}^{n} u_k} = e^{-S_n}$ et par telescopage,

$\prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_0}$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_0 e^{-S_n}$

et $S_n = -\ln \frac{u_{n+1}}{u_0}$ donc par continuité de ln, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty}$

Exercice 4.

- f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
- f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) = \left(1 - \dfrac{x+2}{x^2}\right)e^{1/x} = \dfrac{(x+1)(x-2)}{x} e^{1/x}$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	$0 \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	$4e^{1/2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour le tracé, on pensera à tracer les tangentes horizontales aux points d'abscisse -1 et 2

asymptote :

On effectue un développement asymptotique en $+\infty$. On pose $u = \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et on utilise $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$

On obtient $f(x) = (x+2)\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = x + 3 + \dfrac{5}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-3) = 0$ et la droite d'équation $y = x+3$ est asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$

De plus, $f(x) - (x-3) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{5}{2x}$ donc $f(x) - (x-3)$ et $\dfrac{5}{2x}$ ont le même signe au voisinage de $+\infty$. La courbe est donc au dessus de l'asymptote en $+\infty$.

Au voisinage de $-\infty$, le développement est le même (car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$) et donc la courbe admet une asymptote d'équation $y = x+3$ au voisinage de $-\infty$, en étant sous l'asymptote.

Exercice 5 :

Domaine de définition : Il faut que $(x^2-2)(x+3) > 0$. On a donc $D_f =]-3, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

Etude de l'asymptote oblique (en $+\infty$)

pour $x > \sqrt{2}$, $f(x) = \exp\left[\dfrac{1}{3}\ln((x^2-2)(x+3))\right] = \exp\left[\dfrac{1}{3}\ln(x^2-2) + \dfrac{1}{3}\ln(x+3)\right]$

On met en facteur les termes dominants pour faire apparaître une forme du type $\ln(1+u)$ avec u proche de 0.

Au voisinage de $+\infty$, on a

$$f(x) = \exp\left[\frac{1}{3}\left(3\ln x + \ln\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)\right)\right]$$

$$= \exp\left[\frac{1}{3}\left(3\ln x - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - \frac{9}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]$$

on utilise $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$ avec $u = -\dfrac{2}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $u = \dfrac{3}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$$= \exp\left(\ln x + \frac{1}{x} - \frac{13}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$f(x) = x\exp\left(\frac{1}{x} - \frac{13}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$ on utilise $\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$

avec $u = \frac{1}{x} - \frac{13}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$= x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{13}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2x^2}\right)$

$= x + 1 - \frac{5}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

donc <u>f admet une asymptote oblique d'équation $y = x+1$ au voisinage de $+\infty$.</u>

De plus $f(x) - (x+1) \sim -\frac{5}{3x^2}$ donc le signe de $f(x) - (x+1)$ est négatif (le même que $-\frac{5}{3x^2}$) donc <u>la courbe est en dessous de $y = x+1$ en $+\infty$</u>

Exercice 6.

- On effectue un DL en 0 à l'ordre 2 car on peut voir que les termes d'ordre 0 s'éliminent et prévoir que les termes d'ordre 1 doivent s'éliminer par le choix de a et voir ce que ceux d'ordre 2 donnent (pour compenser le x^2) pour obtenir la limite en 0.

$g(x) \underset{0}{=} \frac{1}{x^2}\left[1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (1+ax)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right)\right]$

$= \frac{1}{x^2}\left(\left(\frac{1}{2} - a\right)x + \left(\frac{1}{4} - \frac{a}{2}\right)x^2 + o(x^2)\right)$

donc <u>g est prolongeable en 0 ssi $a = \frac{1}{2}$</u> et dans ce cas $g(x) = o(1)$ (limite nulle) donc on pose <u>$g(0) = 0$</u>

- Pour la dérivabilité, on poursuit le développement et pour les positions relatives, il faudra un ordre de plus.

Après calcul, on a $g(x) = -\frac{1}{12}x - \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$

<u>g est donc dérivable en 0 avec $g'(0) = -\frac{1}{12}$</u>

<u>La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -\frac{1}{12}x$</u> et <u>la courbe est au-dessous de la tangente au voisinage de 0</u> $\left(g(x) - \frac{1}{12}x \underset{0}{\sim} -\frac{1}{12}x^2 < 0\right)$.

Cours 1

1. On a $\mathrm{Im} f = \{f(x), x \in E\}$

- Les vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$ sont dans $\mathrm{Im} f$ donc $\mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \subset \mathrm{Im} f$ car $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace vectoriel, il contient donc toutes les combinaisons linéaires formées à partir de vecteur qu'il contient.
- Montrons l'inclusion inverse : Soit $y \in \mathrm{Im} f$: $\exists x \in E \ / \ y = f(x)$

B est une base de E, il existe donc $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

f est linéaire donc $y = f(x) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$ et $y \in \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$

donc $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$

On a bien $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$

2. $\Rightarrow$) Supposons f injective et montrons que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n) = 0$

Par linéarité de f, on a $f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = 0$

Comme f est injective, on a $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ et $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$

or $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, elle est donc libre donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

donc $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F.

$\Leftarrow$) Supposons que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F et montrons que f est injective (i.e $\mathrm{Ker} f = \{0\}$)

On a toujours $\{0\} \subset \mathrm{Ker} f$, il reste à montrer l'autre inclusion.

Soit $x \in \mathrm{Ker} f$.

$f(x) = 0$ et $\exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Par linéarité de f, on a $f(x) = 0 = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$

Or la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre donc $\forall i \in [\![1, n]\!] \ x_i = 0$

donc $x = 0$ et $\mathrm{Ker} f \subset \{0\}$

donc $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ et f est injective.

3. f est surjective ssi $\mathrm{Im} f = F$

Or d'après 1). $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$

donc f est surjective ssi $F = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ ssi $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F.

Exercice 2 :

1. Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $u'=(x',y')\in\mathbb{R}^2$. Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

$$f(\lambda u+\mu u') = f(\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y') = (\lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y', \lambda y+\mu y'-\lambda x-\mu x'; \lambda x+\mu x'-\lambda y-\mu y')$$

$$= \lambda(x+y, y-x, x-y)+\mu(x'+y', y'-x', x'-y') = \lambda f(x,y)+\mu f(x',y')$$
$$= \lambda f(u)+\mu f(u')$$

f est donc une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$.

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(1,0), f(0,1)) = \operatorname{Vect}((1,-1,1),(1,1,-1))$

$((1,-1,1),(1,1,-1))$ est une famille libre (les deux vecteurs ne sont pas colinéaires) et génératrice

donc $((1,-1,1),(1,1,-1))$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

2. Soit $(P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$

$$f(\lambda P+Q)(X) = (\lambda P+Q)(X+1)-(\lambda P+Q)(X) = \lambda P(X+1)+Q(X+1)-(\lambda P(X)+Q(X))$$
$$= \lambda(P(X+1)-P(X))+Q(X+1)-Q(X) = \lambda f(P)(X)+f(Q)(X)$$

donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ (c'est un endomorphisme)

On a $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(1), f(X), \dots, f(X^n))$. Or $f(1)=0$

donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(X),\dots,f(X^n))$ (1)

et $\forall k\in[\![1,n]\!]$ $\quad f(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}X^i$

donc $\deg f(X^k) = k-1$, la famille $(f(X),\dots,f(X^n))$ est échelonnée en degré, elle est donc libre. Elle est aussi génératrice de $\operatorname{Im} f$ (1) donc c'est une base de $\operatorname{Im} f$.

On a donc $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$. et par le théorème du rang :

$\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}_n[X] - \operatorname{rg} f = n+1-n = 1$

or $1\in\operatorname{Ker} f$ $(f(1)=0)$ donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1)$ (il s'agit de tous les polynômes constants)

Exercice 3 :

1. Après calcul (à détailler), on trouve, par exemple, que $((2,\underset{\shortparallel}{\overset{u_1}{1}},-3,0),(0,\underset{\shortparallel}{\overset{u_2}{0}},-1,1))$ est une base de F.
On vérifie que (u_1, u_2, e_1, e_1-e_3) forment une base de E, en considérant par exemple la matrice formée de ces vecteurs en colonnes et en l'échelonnant. On trouve qu'elle est de rang 4 donc la famille de 4 vecteurs est libre dans $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$ et F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

2. Pour connaître une expression de $f(u)$, il suffit de connaître $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ et $f(e_4)$.
D'après l'énoncé et par linéarité de f, on a $f(e_1)=e_2+e_3$ et $f(e_3)=-3e_1+e_3+e_4$.
De plus, on a $f(2e_1+e_2-3e_3)=0$ et $f(e_4-e_3)=0$
d'où $f(e_3)=f(e_4)$ et $f(e_2)=3f(e_3)-2f(e_1)=-9e_1+3e_3+3e_4-2e_2-2e_3$
$=-9e_1+e_3+3e_4-2e_2$
Pour calculer $f(u)$, on utilise $f(u)=x f(e_1)+y f(e_2)+z f(e_3)+t f(e_4)$
$=(-9y-3z-3t)e_1+(x-2y)e_2+(x+y+z+t)e_3$
$+(3y+z+t)e_4$

ou la matrice de f dans la base B.

Exercice 4 :

1. Le produit de deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$ est encore dans $M_2(\mathbb{R})$ donc f arrive bien dans $M_2(\mathbb{R})$.
De plus $\forall M,N\in M_n(\mathbb{R})$ $\forall \lambda\in\mathbb{R}$ $f(\lambda M+N)=A(\lambda M+N)=\lambda AM+AN=\lambda f(M)+f(N)$
donc f est une application linéaire.
f est bien un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

2. $(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ avec $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$
et $E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$
Après calcul, on a $f(E_{11})=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}=-E_{11}+E_{21}$ $f(E_{12})=-E_{12}+E_{22}$; $f(E_{21})=2E_{11}$
et $f(E_{22})=2E_{12}$.
On peut utiliser ces calculs pour calculer Imf.

3. Ker f : $M\in\text{Ker} f \iff AM=0$ or A est inversible donc $AM=0 \Rightarrow A^{-1}AM=0$
et $M=0$ donc $\text{Ker} f\subset\{0\}$ et réciproque évidente donc
$\boxed{\text{Ker} f=\{0\}}$ donc f est injectif or $f\in\mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}))$ et ~~E~~ $M_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc f est bijectif donc surjectif donc
$\boxed{\text{Im} f=M_2(\mathbb{R})}$

Exercice 5 :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Il faut justifier que f est linéaire (à détailler)
Vérifions que f arrive dans $\mathbb{R}_3[X]$:
$\deg f(P) \leq \max(\deg(P), \deg(1-X)P') \leq \max(3, 1+\deg P') \leq \max(3, 1+2) = 3$
donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3))$
On a $f(1) = 1$ $f(X) = 1$ $f(X^2) = -X^2 + 2X$ et $f(X^3) = -2X^3 + 3X^2$
donc $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(1, -X^2 + 2X, -2X^3 + 3X^2)$
donc $(1, -X^2 + 2X, -2X^3 + 3X^2)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im} f$.
Elle est aussi libre (car échelonnée en degré), c'est donc une base de $\mathrm{Im} f$.
$\boxed{\mathcal{B}_1 = (1, -X^2 + 2X, -2X^3 + 3X^2)}$

3. Par le thm du rang ($\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension finie),
$\dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathbb{R}_3[X] - \mathrm{rg} f = 4 - 3 = 1$
Il faut donc juste trouver un vecteur non nul dans le noyau pour en avoir une base.
On a $f(1) = f(X)$ donc $f(X-1) = 0$ et $X - 1 \in \mathrm{Ker} f$.
donc $\boxed{\mathcal{B}_2 = (X-1) \text{ est une base de } \mathrm{Ker} f}$

4. $\mathcal{B} = (1, X-1, -X^2 + 2X, -2X^3 + 3X^2)$ est une famille libre (car échelonnée en degrée) de 4 vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$ qui est de dimension 4, c'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

5. D'après la question précédente $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Autre preuve : on aurait pu utiliser le thm du rang pour avoir l'égalité sur les dimensions et montrer que $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0\}$.

Jour 13

Cours 1

1.

2. Soient $u \in C^1(I)$ et $v \in C^1(I)$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}$ $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$

preuve :

$F : t \mapsto u(t)v(t)$ est de classe C^1 sur I

Or, on a (conséquence du thm fondamental de l'intégration) $\int_a^b F'(t)dt = F(b)-F(a) = [F(t)]_a^b$

Or $F' = u'v + uv'$ donc $\int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient $\int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b$
d'où le résultat

3. Soit $f \in C^0(I,\mathbb{R})$ et φ de classe C^1 sur $[a,b]$. On suppose que $\varphi([a,b]) \subset I$.
On a alors $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$.

4. $f \in C^0(I,\mathbb{K})$ $a \in I$
L'application $F_a : I \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $F_a'(x) = f(x)$.

Exercice 2 :

On donne une primitive, les autres sont obtenues par l'ajout d'une constante.

1) $x \mapsto -\frac{3}{13}e^{2x}\cos(3x) + \frac{2}{13}e^{2x}\sin(3x)$ sur $\mathbb{R}$

2) $x \mapsto (\ln x)^2 x - 2x\ln(x) + 2x$ sur $]0,+\infty[$

3) $x \mapsto x\tan x + \ln|\cos x|$ sur tout intervalle ne contenant aucun multiple impair de $\frac{\pi}{2}$.

4) $x \mapsto \ln|x+1|$ puis $x \mapsto \ln|x+1| + \frac{2}{x+1}$

Exercice 3 :

1. $x \mapsto \left(\arctan \frac{x}{\sqrt{3}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{3}} + k$ sur $\mathbb{R}$

2. $x \mapsto -\frac{1}{5}\sin x(\cos x)^4 + \frac{1}{15}(\cos x)^2\sin x + \frac{2}{15}\sin(x) + k$ sur $\mathbb{R}$

3. $x \mapsto -\frac{1}{4}(\sin x)^3\cos x - \frac{3}{8}\cos x\sin x + \frac{3}{8}x + k$ sur $\mathbb{R}$ $= \frac{3}{8}x + \frac{1}{32}\sin(4x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + k$

4. $x \mapsto -\frac{1}{2}\sin^2 x + \ln|\tan x| + k$ sur tout intervalle ne contenant pas de multiple de $\frac{\pi}{2}$.

5. $x \mapsto \frac{1}{2}x\cos x e^x - (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})e^x\sin(x) + k$ sur $\mathbb{R}$

6. $x \mapsto \frac{1}{8}(7 - 6x + 2x^2 + 4x^3)e^{2x} + k$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 :

1) $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-x}}\right) + k$ sur $]0,2[$ ou $]-\infty,0[$

2) $x \mapsto \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + k$ sur tout intervalle ne contenant ni 2 ni 3

3) $x \mapsto \arctan(x-2) + k$ sur $\mathbb{R}$

4) $x \mapsto \frac{1}{8} \ln\left|\frac{2x+1}{2x-3}\right| + k$ sur tout intervalle ne contenant ni $-\frac{1}{2}$ ni $\frac{3}{2}$.