Jour 7 : Probabilités

Cours 1

1. Un **événement impossible** est l'ensemble vide.
   Un **événement élémentaire** ne contient qu'un seul élément.
   Soit Ω un univers, $\bar{A}$ l'événement contraire de A correspond à $\Omega \backslash A$.
2. Deux événements A et B sont **incompatibles** si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
   Deux événements A et B sont **indépendants** si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
3. Soit $(\Omega, P(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.
   Un **système complet d'événements** est une famille $(A_1, \ldots, A_n)$ d'événements deux à deux incompatibles et dont l'union est égale à Ω.
4. (a) Formule des probabilités composées :
   Soient $(\Omega, P(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $(A_i)_{1 \leq i \leq m}$ une famille d'événements telle que $P\left(\bigcap_{1 \leq i \leq m} A_i \right) \neq 0$.
   Alors, $P\left(\bigcap_{1 \leq i \leq m} A_i \right) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{m-1}}(A_m)$.

   (b) Formule des probabilités totales :
   Soient $(\Omega, P(\omega), P)$ un espace probabilisé fini et $(A_i)_{1 \leq i \leq m}$ une famille d'événements. alors pour tout élément B de $P(\Omega)$,
   $$P(B) = \sum_{n=1}^{m} P(B \cap A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_{A_n}(B) P(A_n),$$
   avec la convention $P(B|A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$.

   (c) Formules de Bayes :
   Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, alors
   $$P_B(A) = P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}.$$

Exercice 2

On a la même probabilité de tirer chacune des cartes. Pour calculer chaque probabilité , on va calculer le nombre de tirages favorables sur le nombre de tirage. On tire 6 cartes dans un paquet de 52 cartes, on a donc $\binom{52}{6}$ tirages possibles.

1. On veut six cartes de valeurs différentes. Il y a 13 valeurs différentes dans le paquet. On va d'abord choisir les 6 valeurs obtenues : on a $\binom{13}{6}$ valeurs possibles. Pour chaque valeur, il y a quatre cartes différentes. Donc une fois les valeurs choisies, on a 4^6 cartes possibles.
   La probabilité demandée est $\frac{\binom{13}{6}4^6}{\binom{52}{6}}$.
2. On veut deux brelans (donc deux fois trois cartes identiques). On commence par les valeurs des deux brelans, on a $\binom{13}{2}$ choix possibles. Pour chaque brelan, on a tiré 3 des quatre cartes de la valeurs soit $\binom{4}{3} = 4$.
   La probabilité demandée est $\frac{\binom{13}{2}4^2}{\binom{52}{6}}$.
3. On veut trois paires. On commence par les valeurs des trois paires, on a $\binom{13}{3}$ choix possibles. Pour chaque paire, on a tiré 2 des quatre cartes de la valeurs soit $\binom{4}{2} = 6$.
   La probabilité demandée est $\frac{\binom{13}{3}6^3}{\binom{52}{6}}$.
4. On veut une paire et un carré. On commence par les valeurs possibles, on a $\binom{13}{2}$ valeurs possibles, puis on a deux possibilité, soit la première valeur est associée au carré et l'autre à la paire, soit c'est l'inverse. Pour la paire, on a 6 possibilités et une unique pour le carrée. La probabilité demandée est $\frac{2 \times 6 \times \binom{13}{3}}{\binom{52}{6}}$.

Exercice 3

Pour $i \in \{1,\dots,6\}$, notons p_i la probabilité d'avoir la face i et A_i l'événement avoir un i. D'après l'énonce, on a, $\forall i \in \{1,\dots,6\}$, $p_i = ip_1$.

1. On doit avoir $p_1 + p_2 + \dots + p_6 = 1$ car les $(A_i)_{i\in\{1,\dots,6\}}$ forment un système complet d'événements. Donc $p_1 = \frac{1}{21}$.
   $\forall i \in \{1,\dots,6\}$, $p_i = \frac{i}{21}$.
2. On nous demande la probabilité d'avoir un 2 ou un 4 ou un 6. Les événements étant incompatibles, la probabilité demandée vaut $p_2 + p_4 + p_6 = \frac{4}{7}$.

Exercice 4

Notons S l'évènement "L'individu est sans opinion", P : "Il est favorable à la paix" et G : "Il est favorable à la guerre". On notera également A et B les évènements correspondants à l'appartenance à l'un des deux pays.

1. D'après la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements (A,B), on a
   $P(S) = P_A(S) \times P(A) + P_B(S) \times P(B)$. D'après l'énonce, on a $P_A(S) = 1 - P_A(G) - P_A(P) = 1 - 0.16 - 0.6 = 0.24$. De même $P_B(S) = 0.2$. On a donc $P(S) = 0.22$.
2. On nous demande $P_G(A)$. D'après la formule de Bayes, $P_G(A) = P_A(G) \times \frac{P(A)}{P(G)} = 0.5\frac{0.16}{0.4}$.
   On a supposer $P(A) = 0.5$ car il n'y a pas d'information dans l'énoncé. Pour $P(G)$, on a procédé comme à la question précédente, en utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (A,B).
3. En procédant comme à la question précédente, on trouve $P_P(A) = P_A(P) \times \frac{P(A)}{P(P)} = 0.5\frac{0.6}{0.36}$.

Exercice 5

1. Cas $n = 3$.
   (a) Par la formule des probabilités composées, on a $P(E_1) = P(B_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(B_1) \times P_{B_1}(R_2) \times P_{B_1\cap R_2}(R_3) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{8}$.
   (b) On a $P(E_2) = P(R_1 \cap B_2 \cap R_3)$ et $P(E_3) = P(R_1 \cap R_2 \cap B_3)$. Comme à la question précédente, en utilisant la formule des probabilités composées, on a $P(E_2) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8}$ et $P(E_3) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9}$
   (c) On remarque que cet évènement s'écrit comme $E_1 \cup E_2 \cup E_3$. Ces derniers étant deux à deux incompatibles, on a $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$.
2. Cas général
   (a) "obtenir exactement une boule blanche"=$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$.
   On a $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $E_i = R_1 \cap \dots R_{i-1} \cap B_i \cap R_{i+1} \cap \dots \cap R_n$. Par la formule des probabilités composées, on obtient :
   $P(E_i) = (\frac{4}{9})^{i-1} \times \frac{5}{9} \times (\frac{4}{8})^{n-i}$.
   Les événements $(E_1,\dots,E_n)$ étant deux à deux incompatibles, on obtient
   $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) = \sum_{i=1}^{n} (\frac{4}{9})^{i-1} \times \frac{5}{9}(\frac{4}{8})^{n-i} = \frac{5}{9} \times \frac{9}{4}\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{8}{9})^i = \frac{5}{2^{n+2}}\left(\frac{1-(\frac{8}{9})^n}{1-\frac{8}{9}}\right) = \frac{5\times 9}{2^{n+2}}(1-(\frac{8}{9})^n)$
   (b) En utilisant l'événement contraire, on a $p_n = 1 - P(R_1 \cap \dots \cap R_n) = 1 - (\frac{4}{9})^n$.
   On a $p_n \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,01 \geq (\frac{4}{9})^n \Leftrightarrow \ln(0,01) \geq n\ln(4/9) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(4/9)}$. $n = 6$ convient

Jour 14 : Variables aléatoires

Cours 1

1. Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$: $X \sim \mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$
   - $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$;
   - pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $P(X=i) = \frac{1}{n}$.
   - $E(X) = \frac{n+1}{2}$, et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.
   - Exemple fondamental :
     Dans une urne se trouvent n boules numérotées de 1 à n. On en tire une au hasard et on note X le nombre obtenu.
2. Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$: $X \sim \mathcal{B}(p)$
   - $X(\Omega) = \{0,1\}$;
   - $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$.
   - $E(X) = p$, et $V(X) = p(1-p)$.
   - Exemple fondamental :
     On lance une pièce mal équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut p et on note X la variable aléatoire valant 1 si on tombe sur Pile et 0 si on tombe sur face.
3. Loi binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$: $X \sim \mathcal{B}(n,p)$
   - $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$;
   - $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $P(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$.
   - $E(X) = np$, et $V(X) = np(1-p)$.
   - Exemple fondamental :
     Une urne contient des boules avec une proportion p de boules blanches. On tire successivement AVEC remise n fois une boule dans cette urne et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de succès.

Exercice 2

1. $X \sim \mathcal{U}_{[\![1,6]\!]}$ (pas besoin de justifier)
2. On répète de manière indépendante 8 fois la même expérience : "tirer une boule" et on s'intéresse au nombre de succès de l'événement "La boule est rouge" de probabilité : $\frac{1}{3}$. Donc $X \sim \mathcal{B}(8, \frac{1}{3})$
3. On répète de manière indépendante 10 fois la même expérience : "Mettre une boule dans un sac" et on s'intéresse au nombre de succès de l'événement "On choisit le sac 1" de probabilité : $\frac{1}{3}$. Donc $X \sim \mathcal{B}(10, \frac{1}{3})$
4. $X \sim \mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$
   Pour justifier ce résultat, on est obligé de faire le calcul de chaque événement élémentaire en utilisant la formule des probabilités composées.

Exercice 3

Le gain du joueur peut être de 1, 2, 3 ou -1 euro. On a donc $X(\Omega) = \{-1,1,2,3\}$. Notons par ailleurs que $|\Omega| = 6^3 = 216$ (on lance trois dés à 6 faces). Il ne reste plus qu'à calculer la probabilité de sortir un nombre de 6 donné pour obtenir la loi de X. Pour obtenir trois 6, il n'y a qu'un tirage possible, soit une probabilité de $\frac{1}{216}$. Pour deux 6, on a le choix du dé qui ne donnera pas un 6 (trois possibilités), ainsi que du chiffre obtenu sur ce dé (cinq possibilités), soit une probabilité de $\frac{3\times 5}{216} = \frac{15}{216}$. De même, pour un 6, trois choix pour le dé qui donne 6, et cinq choix pour le résultat de chacun des deux dés restants, soit une probabilité de $\frac{3\times 5^2}{216} = \frac{75}{216}$. Enfin, si on n'obtient pas de 6, on a cinq choix pour chaque dé, soit une probabilité de $\frac{5^3}{216} = \frac{125}{216}$. On vérifie que la somme de ces probabilités est bien égale à 1, et on a donc la loi suivante :
$P(X=-1) = \frac{125}{216}$, $P(X=1) = \frac{75}{216}$, $P(X=2) = \frac{15}{216}$ et $P(X=3) = \frac{1}{216}$.
On a $E(X) = -\frac{125}{216} + \frac{75}{216} + 2\times\frac{15}{216} + 3\times\frac{1}{216} = -\frac{17}{216} \sim -0{,}08$. On perdra donc en moyenne huit centimes d'euros par partie. Ensuite, par la formule de transfert, $E(X^2) = \frac{125}{216} + \frac{75}{216} + 2^2\times\frac{1}{216} + 3^2\times\frac{1}{216} = \frac{269}{216}$, et par la formule de Huyghens-Koening, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \sim 1{,}24$.

Exercice 4

1. Pour déterminer la loi de X_1, peu importe l'ordre dans lequel on a effectué les trois premiers tirages. On peut donc considérer qu'on a tiré simultanément trois boules parmi les six de l'urne, soit $\binom{6}{3} = 20$ tirages possibles. Parmi ceux-ci, un seul ne laisse aucune boule numéro 1 dans l'urne (il faut évidemment tirer les trois boules numéro 1). Symétriquement, un seul laisse trois boules numéros 1 dans l'urne. Pour avoir $X_1 = 1$, il faut tirer deux boules 1 parmi les trois disponibles, et une boule parmi les trois autres, soit $\binom{3}{2} \times \binom{3}{1} = 3 \times 3 = 9$. Le nombre de tirages donnant $X_1 = 2$ vaut également 9 (la situation est en fait symétrique).
Soit une loi pour X_1 donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(X_2 = k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

Après calcul, on a $E(X_1) = \frac{3}{2}$. Par la formule de transfert, $E(X_1^2) = \frac{27}{10}$, et par la formule de Huyghens-Koening $V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \frac{9}{20}$.

2. Au minimum, il faudra trois tirages pour ne plus avoir de boules 1. Au pire, il en faudra six. Pour avoir $X_2 = 3$, il faut tirer les trois boules 1 lors des trois premiers tirages, on a vu plus haut que cela se produisait avec probabilité $\frac{1}{20}$. Pour avoir $X_2 = 4$, il faut tirer deux boules 1 lors des trois premiers tirages (probabilité $\frac{9}{20}$, comme vu à la question précédente), puis lors du quatrième tirage, tirer la dernière boule 1 parmi les trois restantes, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{3}$, soit finalement $P(X_2 = 4) = \frac{9}{20} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{20}$. De même, pour $X_2 = 5$, il faut tirer deux boules 1 et deux autres sur les quatre premiers tirages ($\frac{\binom{3}{2}\times\binom{3}{2}}{\binom{6}{4}} = \frac{3}{5}$) puis tirer la boule 1 au cinquième tirage parmi les deux restantes, soit globalement $P(X_2 = 5) = \frac{3}{10}$. Enfin, on obtient par soustraction ou par un raisonnement direct, $P(X_2 = 6) = \frac{1}{2}$.
Soit une loi pour X_2 donnée par le tableau suivant :

k	3	4	5	6
$P(X_2 = k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

Après calcul, on a $E(X_2) = \frac{21}{4}$. Par la formule de transfert, $E(X_2^2) = \frac{567}{20}$, et par la formule de Huyghens-Koening $V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = \frac{63}{80}$.

3. X_3 prend toutes les valeurs de 1 à 6 avec probabilité $\frac{1}{6}$ chacune (on le prouve avec la formule des probabilités composées). On a donc $X_3 \sim \mathcal{U}_{[\![1,6]\!]}$ et $E(X_3) = \frac{7}{2}$ et $V(X_3) = \frac{35}{6}$.

4. On peut obtenir au minimum une somme de 3 en trois tirages, au maximum une somme de 7. Pour obtenir 3, il faut tirer les trois numéros 1, de probabilité $\frac{1}{20}$. Pour avoir 4, il faut tirer deux 1 et un 2, ce qui donne $\binom{3}{2} \times \binom{2}{1} = 6$ tirages possibles (toujours sur 20 au total). Pour le 5, on peut tirer deux 1 et un 3 (trois possibilités), ou bien un 1 et les deux 2 (encore trois possibilités). Pour une somme de 6, il faut un 1, un 2 et un 3 (encore six possibilités), et il reste une unique possibilité pour le 7. Soit une loi pour X_4 donnée par le tableau suivant :

k	3	4	5	6	7
$P(X_4 = k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{1}{20}$

Après calcul, on a $E(X_4) = 5$ et $V(X_4) = 1$.

Jour 15 : Polynômes et décomposition en éléments simples

Cours 1

1. Soient P et Q deux polynômes, alors $deg(P+Q) \leqslant \max(deg(P), deg(Q))$ et $deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$.
2. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ses racines (éventuellement répétées plusieurs fois en cas de racines multiples). On a alors les relations suivantes entre les coefficients et les racines de P :
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$
3. Soit P un polynôme et a une racine de P. On dit que a est une racine d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ si P est divisible par $(X-a)^k$, mais pas par $(X-a)^{k+1}$.
Une racine a est d'ordre de multiplicité k pour P si et seulement si $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$
4. Tout polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ est scindé.
5. $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - w^k)$ avec $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Exercice 2

1. Le polynôme P n'est pas constant et $\deg(P') \geq 0$. Donc $\deg\left(X^2P'\right) = 2 + \deg(P) - 1 = \deg(P) + 1 > \deg(P)$. Par propriété, $\deg(Q) = \deg(P) + 1$. $\deg(R) \leq \deg(P)$ car les deux polynômes ont le même degré. Cependant, $P = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$ et $XP' = \sum_{n=1}^{N} n a_n X^n$, soit $R = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (n+1) a_n X^n$. On observe que $(N+1)a_N \neq 0$. Ainsi, $\deg(R) = \deg(P)$.
2. (a) $H_1 = -2X; H_2 = -2 + 4X^2; H_3 = 12X - 8X^3$.
   (b) Par récurrence : $\deg(H_n) = n$ et son coefficient dominant est $(-2)^n$

Exercice 3

1. $Q = X^3 - X^2$, $R = X^2 + 1$
2. $X^3 + X^2 - 2X + 3 = (X^2 + 2X - 1)(X - 1) + X + 25$.
3. $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5x + 6 = (X^2 - 3X + 1)(2X^2 + 3X + 11) + 25X - 5$
4. $A = X^4 - 2X^2\cos(2\theta) + 1 = (X^2 - 2X\cos(\theta) + 1)(X^2 + 2\cos(\theta)X + 1)$
5. $X^3 - iX^2 - X = (X - 1 + i)(X^2 + (1-2i)X - 2 - 3i) - 5 - i$

Exercice 4

1. $\left(X^2 - X + 1\right)^2 + 1 = \left(X^2 - X + 1 - i\right)\left(X^2 - X + 1 + i\right)$ Factorisons $\left(X^2 - X + 1 - i\right)$ (dans $\mathbb{C}$) Le discriminant est $\Delta = 1 - 4(1-i) = -3 + 4i$. On cherche une racine carrée (dans $\mathbb{C}$) sous la forme $\omega = a + ib$. Nous obtenons $\omega^2 = a^2 - b^2 + 2aib$, soit $a^2 - b^2 = -3$ et $2ab = 4$. Cela ne suffit pas et il fait penser au module pour obtenir une condition supplémentaire : $|\omega|^2 = a^2 + b^2 = |\Delta| = 5$. Ainsi $2a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1$ puis $2b^2 = 8 \Leftrightarrow b^2 = 4$. Enfin, $ab = 2 \geq 0$ et les deux racines carrées sont $1 + 2i$ et $-1 - 2i$. Finalement, $\left(X^2 - X + 1 - i\right) = \left(X - \frac{1+1+2i}{2}\right)\left(X - \frac{1-1-2i}{2}\right) = (X - [1+i])(X + i)$. Le travail est désormais fini. En effet, on pourrait penser à factoriser par la même méthode le polynôme $\left(X^2 - X + 1 + i\right)$, mais cela peut Solution de l'exercice 3 : sembler long... Sinon on utilise que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si l (Q 1) $Q = X^3 - X^2, R = X^2 + 1$. $\left(X^2 - X + 1\right)^2 + 1 = (X - [1+i])(X+i)(X - [1-i])(X - i)$ On regroupe les monômes conjugués l'un de l'autre :

$$\left(X^2 - X + 1\right)^2 + 1 = \left(X^2 + 1\right)\left(X^2 - 2X + 2\right)$$

2. On est capable de calculer toutes les racines (complexes) du polynôme, qui sont les racines sixièmes du nombre $-1 = e^{i\pi}$: elles ont toutes un module 1 et un argument vérifiant $6\theta \equiv \pi[2\pi]$, donc $\theta \equiv \frac{\pi}{6}\left[\frac{\pi}{3}\right]$. On peut même toutes les écrire sous forme algébrique : $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, z_3 = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et les conjugués $z_4 = e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_5 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$ et enfin $z_6 = e^{i\frac{11\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Autrement dit, dans $\mathbb{C}[X], X^6 + 1 = (X -$

$i)(X+i)\left(X-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(X+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(X+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(X-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$. Pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe chaque racine avec son conjugué pour trouver trois facteurs irréductibles de degré 2 : $X^6+1=\left(X^2+1\right)\left(X^2-\sqrt{3}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{3}X+1\right)$.

3. Pour chercher la racine double, il est un peu plus simple de chercher directement les racines du polynôme dérivée $P'=4X^3-15X^2+8X+3$. On constate que 1 est racine évidente, mais malheureusement 1 n'est pas racine de P puisque $1-5+4+3+9\neq 0$. On enchaine avec 2 , mais $P'(2)=32-60+16+3\neq 0$; tentons donc $P'(3)=108-135+24+3=0$. Ah, nouvelle chance : $P(3)=81-135+36+9+9=0$. On a trouvé notre racine double, on peut donc factoriser sous la forme $P=(X-3)^2Q$. En effectuant une division euclidienne, on en déduit que $P=(X-3)^2\left(X^2+X+1\right)$. On ne peut pas faire mieux dans $\mathbb{R}[X]$ puisque le dernier facteur a un discriminant négatif. Dans $\mathbb{C}[X], P=(X-3)^2\left(X+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. La méthode normale est ici de poser $Y=X^4$ pour obtenir Y^2+Y+1. On commence à savoir que ce trinôme a pour racines $Y_1=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $Y_2=e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Il ne reste plus qu'à trouver les racines quatrièmes de ces deux nombres pour avoir les huit racines de P. Ouf, c'est assez facile, pour Y_1 on trouve $e^{i\frac{2\pi}{12}}=e^{i\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}; e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}=e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}; e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)}=-e^{i\frac{\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ et $-e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les racines quatrièmes de Y_2 sont simplement les conjugués des précédentes, à savoir $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}; -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ et $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Conclusion :

$$P=\left(X-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$$

5 $\left(X-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\left(X+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(X+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$. Dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les racines conjuguées pour obtenir $P=\left(X^2-X+1\right)\left(X^2+X+1\right)\left(X^2-\sqrt{3}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{3}X+1\right)$.

Mais les plus astucieux auront naturellement évité tous ces affreux calculs en recourant à l'ignoble astuce suivante : $P(X)=X^8+X^4+1=\left(X^8+2X^4+1\right)-X^4=\left(X^4+1\right)^2-\left(X^2\right)^2$. On reconnait maintenant une différence de deux carrés, qu'on sait factoriser : $P(X)=\left(X^4+\ X^2+1\right)\left(X^4-X^2+1\right)$. Chacun des deux facteurs peut à nouveau se factoriser en utilisant la même technique : $X^4+X^2+1=\left(X^2+1\right)^2-X^2=\left(X^2+X+1\right)\left(X^2-X+1\right)$; et $X^4-X^2+1=\left(X^2+1\right)^2-3X^2=\left(X^2+1\right)^2-(\sqrt{3}X)^2=\left(X^2+\sqrt{3}X+1\right)\left(X^2-\sqrt{3}X+1\right)$ Finalement, on obtient la factorisation suivante pour P : $P(X)=\left(X^2+\sqrt{3}X+1\right)\left(X^2+\ X+1\right)\left(X^2-X+1\right)\left(X^2-\sqrt{3}X+1\right)$ (et on constate que chacun des quatre facteurs a un discriminant négatif, on ne peut donc pas aller plus loin dans $\mathbb{R}[X]$).

Exercice 5

1. On peut montrer par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$: que si α est racine de P, alors $\alpha+n$ donc P admet une infinité de racines.
2. Soit P n'admet pas de racine (et est donc un polynôme constant) soit admet une infinité de racine et est le polynôme nul.

   Réciproquement, tout polynôme constant vérifie l'équation.

Exercice 6

1. $\frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)}=\frac{2}{(X+1)^2}-\frac{1}{X+1}+\frac{1}{X+2}$.

   - Calcul de a, b et c par simple identification : Toute décomposition en éléments simples peut être calculée par identification, mais au prix de calculs souvent importants. Ici :

$$\frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)}=\frac{a}{(X+1)^2}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{X+2}=\frac{a(X+2)+b(X+1)(X+2)+c(X+1)^2}{(X+1)^2(X+2)}$$
$$=\frac{(b+c)X^2+(a+3b+2c)X+(2a+2b+c)}{(X+1)^2(X+2)},$$

   donc par identification : $b+c=0, \quad a+3b+2c=1 \quad$ et $\quad 2a+2b+c=3$. Il « suffit » dès lors de résoudre ce système linéaire de 3 équations à 3 inconnues pour conclure. Pratiquée brutalement, l'identification est ainsi déjà pénible pour calculer 3 coefficients, mais elle l'est encore plus pour davantage de coefficients. On reprend ci-dessous le travail en valorisant l'économie des calculs.

- Calcul de a : On multiplie $\star$ par $(X+1)^2$ puis on évalue en -1 : $\quad a=2.\quad$ En voilà une bonne technique !

- Calcul de c : On recommence. On multiplie $\star$ par $X+2$ puis on évalue en -2 : $c=1$.

- Calcul de b : On ne peut malheureusement pas reproduire le raisonnement précédent pour calculer b. Multiplier $\star$ par $X+1$ puis évaluer en -1 nous conduirait en effet à diviser par 0 à cause du terme $(X+1)^2$. Qu'à cela ne tienne, plusieurs approches sont envisageables, AU CHOIX :

- On peut multiplier $\star$ par X puis passer à la limite en $+\infty$: $0=0+b+c, \quad$ donc $b=-c=-1$. On obtient généralement ainsi une équation simple et agréable.

- On peut évaluer $\star$ en un point, par exemple en 0 : $\quad \frac{3}{2}=a+b+\frac{c}{2}$, ce qui donne aussi $b=-1$. Les équations qu'on obtient en évaluant en un point sont souvent un peu plus compliquées que celles qu'on obtient en passant à la limite en $+\infty$.

- Comme il ne reste qu'un coefficient à calculer, on peut aussi finir par simple identification :

$$\frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)}=\frac{2}{(X+1)^2}+\frac{b}{X+1}+\frac{1}{X+2}=\frac{2(X+2)+b(X+1)(X+2)+(X+1)^2}{(X+1)^2(X+2)}=\frac{(b+1)X^2+\ldots X+\ldots}{(X+1)^2(X+2)}.$$

On n'a même pas besoin d'identifier tous les coefficients, le coefficient de degré 2 suffit par exemple : $0=b+1, \quad$ donc de nouveau $b=-1$.

2.
$$\frac{X^4}{(X+3)\left(X^2+X+3\right)}=X-4+\frac{9}{X+3}+\frac{X+3}{X^2+X+3}$$

- Partie entière : La division euclidienne de X^4 par $(X+3)\left(X^2+X+3\right)$ s'écrit :
$X^4=(X+3)\left(X^2+X+3\right)\underbrace{(X-4)}_{\text{Quotient}}+\underbrace{10X^2+15X+36}_{\text{Reste}}$, donc la partie entière cherchée vaut $X-4$.

- Forme de la décomposition en éléments simples : Pour certains $a,b,c\in\mathbb{R}$:

$$\frac{X^4}{(X+3)\left(X^2+X+3\right)}=X-4+\frac{a}{X+3}+\frac{bX+c}{X^2+X+3}$$

mais en tenant compte de la division euclidienne calculée juste avant, on peut aussi dire que :

$$\star\frac{10X^2+15X+36}{(X+3)\left(X^2+X+3\right)}=\frac{a}{X+3}+\frac{bX+c}{X^2+X+3}.$$

Il est toujours plus facile de calculer les coefficients d'une décomposition en éléments simples quand la partie entière est nulle.

- Calcul de a : On multiplie $\star$ par $X+3$ puis on évalue en -3 : $a=9$.

- Calcul de b : On multiplie $\star$ par X puis on passe à la limite en $+\infty$: $10=a+b$, donc $b=1$.

- Calcul de c : On évalue par exemple $\star$ en 0 : $\quad 0=-4+\frac{a}{3}+\frac{c}{3}, \quad$ donc $c=12-a=3$.

3. $\frac{X^3-2X+4}{X^2-1}=X+\frac{3}{2}\frac{1}{X-1}-\frac{5}{2}\frac{1}{X+1}$.