Exercice 1

On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_0 = v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n + 1 \\ v_{n+1} = 2 - 2u_n \end{cases}$.

1. Montrer que $a_n = u_n + v_n$ définit une suite arithmétique.
2. Montrer que $b_n = 2u_n + v_n$ définit une suite arithmético-géométrique..
3. En déduire les expressions de u_n et de v_n en fonction de n.
4. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et déterminer la limite de cette suite.

Correction 1

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = 3u_n + v_n + 1 + 2 - 2u_n = u_n + v_n + 3 = a_n + 3$.
$\boxed{(a_n)_n \text{ est une suite arithmétique de raison } 3}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 3n + 2$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = 2u_{n+1} + v_{n+1} = 6u_n + 2v_n + 2 + 2 - 2u_n = 4u_n + 2v_n + 4 = 2b_n + 4$.
$\boxed{(b_n)_n \text{ est une suite arithmético-géométrique}}$.
3. Calculons d'abord l'expression de b_n en fonction de n.
Cherchons ℓ tel que $\ell = 2\ell + 4$, on trouve $\ell = -4$.
Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = b_n - \ell = b_n + 4$ et vérifions que c_n est bien une suite géométrique : $\forall n \in \mathbb{N}$ $c_{n+1} = b_{n+1} + 4 = 4u_n + 2v_n + 4 + 4 = 2(b_n + 4) = 2c_n$.
(c_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $c_0 = b_0 + 4 = 7$
donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = 7 \times 2^n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = 7 \times 2^n - 4$.
Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = b_n - a_n = 7 \times 2^n - 3n - 6 \text{ et } v_n = a_n - u_n = 8 + 6n - 7 \times 2^n}$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = 7\sum_{k=0}^{n} 2^k - 3\sum_{k=0}^{n} k - 6(n+1) = 7\frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 3\frac{n(n+1)}{2} - 6(n+1)$.
Donc $\boxed{S_n = 7 \times 2^{n+1} - \frac{3}{2}n^2 - \frac{15}{2}n - 13}$. Par croissance comparée (en mettant 2^{n+1}) en facteur), on obtient $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$.

Exercice 2

On cherche à déterminer toutes les suites (u_n) telles que : $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 3^n$.

1. Vérifier que la suite de terme général 3^n satisfait cette relation.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3^n$. Trouver une relation satisfaite par (v_n) et en déduire l'expression explicite de (v_n).
3. En déduire celle de (u_n).

Correction 2

1. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{n+2} - 4 \times 3^{n+1} + 4 \times 3^n = 3^n(9 - 12 + 4) = 3^n$.
Donc $\boxed{\text{la suite de terme général } 3^n \text{ satisfait la relation}}$.
2. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3^n$. Donc, en utilisant la définition de u_n, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} - 4v_{n+1} + 4v_n = 3^n - 3^n = 0}$. $(v_n)_n$ est une suite récurrente d'ordre 2 et de polynôme caractéristique $X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = (A + Bn)2^n$. Or $v_0 = 0 = A$ et $v_1 = \frac{1}{4} - 3 = 2(A + B)$.
On obtient $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -\frac{11}{8}n2^n}$.
3. On obtient $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n - \frac{11}{8}n2^n}$.

Exercice 16

Soit a un complexe de module différent de 1.
Nous allons déterminer la limite de la suite de terme général :
$u_n = \dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ en distinguant les cas $|a|>1$ et $|a|<1$
2. Montrer qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que pour n assez grand on a $|u_{n+1}| \leq k.|u_n|$
3. En déduire qu'il existe une constante $C>0$ tel que pour n assez grand $0 \leq |u_n| \leq C.k^n$
4. Conclure

Correction 2

1. $\frac{|a|}{1+|a|^{n+1}} \leqslant \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|a|}{|1+a^{n+1}|} \leqslant \frac{|a|}{|1-|a|^{n+1}|}$.
   convergence par encadrement : si $|a|>1$, tend vers 0.
   si $|a|<1$, tend vers $|a|$.
2. $|a|$ fixé
   si $|a|<1$ $\varepsilon = \frac{1-|a|}{2}$ $\exists n_0$ tel que $\exists n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_0$ $\left|\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} - |a|\right| \leqslant \varepsilon$. donc
   $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant |a| + \varepsilon = \frac{1+|a|}{2} < 1$
   Si $|a|>1$ et $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et on a le résultat.
3. Par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant |u_0|k^n$. $(C = |u_0|)$.
4. thm de cv par encadrement $(u_n)_n$ cv vers 0.