Jour 1

Cours 1 :

$\mathbb{R}^n$:
- famille libre de 2 vecteurs : $(1,0,0,\dots,0)\ (0,1,0,\dots,0)$
- " liée de 3 vecteurs : $(1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\ (1,1,0,\dots,0)$
- dimension : n
- base canonique : $(1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,\ (0,\dots,0,1)$

  génératrice : $u=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \qquad u=x_1(1,0,\dots,0)+x_2(0,1,0,\dots,0)+\dots+x_n(0,\dots,0,1)$

  libre : ~~Soit~~ $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1(1,0,\dots,0)+\lambda_2(0,1,0,\dots,0)+\dots+\lambda_n(0,\dots,0,1)=(0,\dots,0)$

  $\iff(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=(0,\dots,0)\iff\forall i\in[\![1,n]\!]\ \lambda_i=0$ ~~donc~~
- autres bases : $(1,0,\dots,0),\ (1,1,0,\dots,0),\ \dots,\ (1,0,\dots,0,1)$

  $(1,0,\dots,0),(1,1,0,\dots,0),(1,1,1,0,\dots,0),\dots,(1,1,\dots,1)$

$\mathbb{R}_n[X]=\{a_0+a_1X+\dots+a_nX^n,\ (a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\}$
- famille libre de 2 vecteurs : $(1,X)$
- " liée de 3 " : $(1,X,2+X)$
- dimension : $n+1$
- base canonique : $(1,X,\dots,X^n)$
- autres bases (pour $n=3$) : $(1,X+1,X^2+1,X^3+1)$

  $(1,X+1,X^2+X+1,X^3+X^2+X+1)$

  $(1,(X-1),(X-1)^2,(X-1)^3)$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- famille libre de 2 vecteurs : $\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\\0&\cdots&&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&&&\vdots\\0&\cdots&&&0\end{pmatrix}$
- famille liée de 3 vecteurs : $\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\\0&\cdots&&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&&&\vdots\\0&\cdots&&&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1&0&\cdots&0\\0&0&0&0&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&&&0\end{pmatrix}$
- dimension : n^2
- base canonique : $(E_{ij})_{1\le i,j\le n}$ avec E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec un 1 au croisement de la ligne i et de la colonne j et des 0 partout ailleurs
- autre base ($n=2$) $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right)$

$\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$:
- famille libre de 2 vecteurs : $(t\mapsto1,\ t\mapsto t)$
- " liée de 3 " : $(t\mapsto1,\ t\mapsto t,\ t\mapsto 2+3t)$
- C'est un espace de dimension infinie qui ne possède pas de base

Cours 2 :

1. On vérifie que les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
   - F est non vide (ou que F contient le vecteur nul de l'espace E).
   - F est stable par combinaison linéaire : $\forall (u,v) \in F^2 \ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}, \lambda u + \mu v \in F$
2. $Vect(u,v) = \{\lambda u + \mu v, (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\} = \{x \in E \ / \ \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, x = \lambda u + \mu v\}$
   Il s'agit de l'ensemble des combinaisons linéaires formées à partir des vecteurs u et v.

Exercice 3 :

1. NON. F ne contient pas $(0,0)$
(Autre possibilité : F n'est pas stable par combinaison linéaire : $u = (1,0) \in F$ et $2u \notin F$).
2. OUI. - Le polynôme nul appartient à F (ou encore $X^3 - X^2 \in F$ donc $F \neq \emptyset$).
   - Soient $(P,Q) \in F^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\quad (\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda \underbrace{P(1)}_{0} + \mu \underbrace{Q(1)}_{0} = 0$

$$(\lambda P + \mu Q)'(0) = \lambda \underbrace{P'(0)}_{=0} + \mu \underbrace{Q'(0)}_{=0} = 0$$

donc $\lambda P + \mu Q \in F$ et F est stable par combinaison linéaire.

donc F est un sous-espace vectoriel de E.

3. OUI. car $x^2 = 0$ équivaut à $x = 0$ donc $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\} = Vect((0,1))$.
4. OUI. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F$
   F est stable par combinaison linéaire : $\forall (M,N) \in F^2 \ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$
   $A(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN = \lambda(2MA) + \mu(2NA) = 2(\lambda M + \mu N)A \Rightarrow \lambda M + \mu N \in F$.
   donc F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4 :

1. La famille est de cardinal trois et $\mathbb{R}^2$ est de dimension deux, donc la famille est $\boxed{\text{liée}}$
(autre possibilité : on écrit un des vecteurs comme combinaison linéaire des deux autres :
ici : $(1,1) = \frac{-5}{7}(1,-2) + \frac{-1}{7}(2,3)$).

2. Montrons que la famille est libre : Soit $(\lambda,\mu,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda(1,1,-2) + \mu(-1,2,1) + \gamma(-1,-9,-6) = 0 \iff \begin{cases} \lambda - \mu - \gamma = 0 \\ \lambda + 2\mu - 9\gamma = 0 \\ -2\lambda + \mu - 6\gamma = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda - \mu - \gamma = 0 \\ 3\mu - 8\gamma = 0 \\ -\mu - 8\gamma = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\iff} \begin{cases} \mu = 0 \\ \gamma = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (\lambda,\mu,\gamma) = (0,0,0)$ et la famille est libre.

3. Regardons si la famille est libre : Soit $(\lambda,\mu,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda(X-1) + \mu(X^2+X) + \gamma(X^2+1) = 0$

$$\iff (\mu+\gamma)X^2 + (\lambda+\mu)X + (\gamma - \lambda) = 0 \iff \begin{cases} \mu + \gamma = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \\ \gamma - \lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\gamma \\ \lambda = \gamma \end{cases} \qquad (1,-1,1) \text{ convient}$$

donc la famille est $\boxed{\text{liée}}$, on a $X - 1 - (X^2+X) + (X^2+1) = 0 \iff X - 1 = X^2 + X - (X^2+1)$.

4. Regardons si la famille est libre : Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 2\pi]$
en évaluant en 0, on a $\lambda = 0$ et en évaluant en $\frac{\pi}{2}$, on a $\mu = 0$ donc
$(\lambda,\mu) = (0,0)$ et la famille est $\boxed{\text{libre}}$

Jour 2

Cours 2 :

a) Limite en un point :

Soit f définie sur un intervalle I, et $a \in I$ (ou a est une extrémité de I).

Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$

$\lim_a f = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in I \cap D_f \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$

b) Continuité en un point :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Soit $a \in I$. On dit que f est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.

c) Dérivabilité en un point :

On dit que f est dérivable en a si $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie.

Dans ce cas, cette limite est notée $f'(a)$ (dérivée de f en a)

Cours 3 :

1) Le théorème des valeurs intermédiaires

Hypothèses	Conclusion
I un intervalle de $\mathbb{R}$ f une application continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ $(a,b) \in I^2$ et y compris entre $f(a)$ et $f(b)$	il existe c compris entre a et b tel que $f(c) = y$.

2) Le théorème de la bijection

Hypothèses	Conclusion
I un intervalle de $\mathbb{R}$ f une application continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ f strictement monotone sur I	$J = f(I)$ est un intervalle (de même nature que I). f est bijective de I dans J. f^{-1} est continue sur J.

3) Le théorème des bornes atteintes

Hypothèses	Conclusion
$a < b$ deux réels f continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$	f est bornée et atteint ses bornes

4) Le théorème de Rolle

Hypothèses	Conclusion
$[a,b]$ un segment f continue sur $[a,b]$ f dérivable sur $]a,b[$ $f(a) = f(b)$	Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$

5) Egalité des accroissements finis

Hypothèse	Conclusion
$[a,b]$ un segment f continue sur $[a,b]$ f dérivable sur $]a,b[$	il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Inégalité des accroissements finis

Hypothèse	Conclusion
I un intervalle f continue sur I f dérivable sur (l'intérieur de) I f' majorée par M sur I	$\forall (x,y) \in I^2$ $\lvert f(x)-f(y)\rvert \leq M\lvert x-y\rvert$

Exercice 4

1. f est C^∞ sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. $\forall x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ $f'(x) = \cos x \geq 0$
f est donc croissante sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ et même strictement croissante (car f' ne s'annule qu'en des points isolés : $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$).

2. On utilise le thm de la bijection :
$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, f est C^0 ~~et~~ strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
$f(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ donc f est une bijection (strictement croissante) de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ sur $[-1,1]$.

3 a) f est une bijection continue de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dans $]-1,1[$, dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$
et tel que f' ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$
donc f^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$ et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

b) D'après ce qui précède, $\forall x \in]-1,1[$ $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(f^{-1}(x))}$

Il faut simplifier $\cos(f^{-1}(x))$.
Or $\forall \theta \in \mathbb{R}$ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ donc $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$
Appliquons ceci à $\theta = f^{-1}(x)$: $\cos^2(f^{-1}(x)) = 1 - \sin^2(f^{-1}(x)) = 1 - x^2$ ($f = \sin$)
Il faut déterminer le signe de $\cos(f^{-1}(x))$ pour choisir entre $\sqrt{1-x^2}$ et $-\sqrt{1-x^2}$.
$f^{-1}(x) \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ donc $\cos(f^{-1}(x)) > 0$ et $\cos(f^{-1}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
donc $\forall x \in]-1,1[$ $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

c) f^{-1} et cos sont C^0 donc $\cos(f^{-1})$ est C^0 et ne s'annule pas sur $]-1,1[$
donc $(f^{-1})'$ est C^0 sur $]-1,1[$ et f^{-1} est C^1 sur $]-1,1[$.

Montrons le résultat par récurrence avec $HR(n)$: "f^{-1} est de classe C^n sur $]-1,1[$".
initialisation :
$n=0$ on a le résultat à la question 3a.
• Hérédité : Supposons que f^{-1} est de classe C^n sur $]-1,1[$.
Alors $\cos(f^{-1})$ est de classe C^n et ne s'annule pas sur $]-1,1[$
donc $(f^{-1})'$ est de classe C^n sur $]-1,1[$ et f^{-1} est de classe C^{n+1} sur $]-1,1[$
donc $HR(n+1)$ est vérifiée.
On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ f^{-1} est C^n sur $]-1,1[$, f^{-1} est donc C^∞ sur $]-1,1[$

Jour 3

Cours 1

1. F et G sont supplémentaires ssi $\forall x \in E \quad \exists! (x_F, x_G) \in F \times G \ / \ x = x_F + x_G$.
2. F et G sont supplémentaires ssi - $F \cap G = \{0\}$ (il suffit de montrer $F \cap G \subset \{0\}$ car $\{0\} \subset F \cap G$ est tjs vrai).
   - $E = F + G$ (de même il suffit de montrer $F + G \supset E$)

Remarque : on peut aussi procéder par analyse - synthèse
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\uparrow\quad\quad\quad\quad\uparrow$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ unicité $\quad$ existence

En dimension finie.
F et G sont supplémentaires ssi
- $F \cap G = \{0\}$
- $\dim E = \dim F + \dim G$

ssi
- $F + G = E$
- $\dim E = \dim F + \dim G$.

3. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$
   Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1)$, $G = \mathrm{Vect}(e_2, e_3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = 0\}$ et $H = \mathrm{Vect}(e_2)$
   F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   F et H ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ car $F + H \neq \mathbb{R}^3$
   G et H ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ car $G \cap H \neq \{0\}$.

Exercice 2.

1. On cherche une famille libre et génératrice de F.
   $u = (x, y) \in F \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} y \Leftrightarrow u = (\frac{3}{2}, 1) y \Leftrightarrow u = \lambda (3, 2)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
   donc $F = \mathrm{Vect}(u_1)$ avec $u_1 = (3, 2)$ (donc u_1 est une famille génératrice de F
   Or u_1 forme une famille libre (car non nul).
   donc <u>(3, 2) est une base de F.</u>

   Pour déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^2$, on complète la base de F trouvée en une base de E. Les vecteurs choisis en complément engendrent un supplémentaire de F.
   Ici, on peut compléter u_1 en une base (u_1, u_2) avec $u_2 = (1, 0)$ et $G = \mathrm{Vect}((1,0))$ est un supplémentaire de F dans E (Un autre supplémentaire est $\mathrm{Vect}((0,1))$).
2. $u \in H \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \ / \ u = t(1,2)$ donc $u = (x, y) \in H \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \ / \ x = t$ et $y = 2t$
   $\Leftrightarrow y = 2x$

$$\boxed{H = \{(x, y) \in E \ / \ 2x - y = 0\}}$$

Exercice 3

1. On commence par chercher une famille génératrice de F puis on vérifie qu'elle est libre pour conclure que c'est une base de F

$u = (x,y,z,t) \in F \iff \begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ x - z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = z - x \\ y = x + 2z - t = 2x + z \end{cases} \iff u = x(1,2,0,-1) + z(0,1,1,1)$

donc $F = \mathrm{Vect}((1,2,0,-1),(0,1,1,1))$ et $((1,2,0,-1),(0,1,1,1))$ est une famille génératrice de F. Il reste à vérifier que c'est une famille libre :

Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ / $\lambda(1,2,0,-1) + \mu(0,1,1,1) = (0,0,0,0) \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ 2\lambda + \mu = 0 \\ \mu = 0 \\ \mu - \lambda = 0 \end{cases} \iff (\lambda,\mu) = (0,0)$

La famille est libre et $\boxed{((1,2,0,-1),(0,1,1,1)) \text{ est une base de } F.}$

Rq : On aurait aussi pu utiliser la méthode du pivot de Gauss pour trouver la famille génératrice.

Pour déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$, on cherche à compléter la base de F trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.

Soit $u_1 = (1,2,0,-1)$ et $u_2 = (0,1,1,1)$ (u_1,u_2) base de F

Posons $e_1 = (1,0,0,0)$ et $e_2 = (0,1,0,0)$

Vérifions que $\mathcal{F} = (e_1,e_2,u_1,u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Pour cela, il suffit de vérifier que c'est une famille libre car $\mathcal{F}$ contient 4 vecteurs et que la dimension de $\mathbb{R}^4$ est 4.

Soit $(\alpha,\beta,\gamma,\mu) \in \mathbb{R}^4$ / $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma u_1 + \mu u_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$

$\iff \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma + \mu = 0 \\ \mu = 0 \\ -\gamma + \mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$ La famille est libre et c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

donc $\boxed{F = \mathrm{Vect}(e_1,e_2) \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } \mathbb{R}^4}$

2. On a $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x = y = z = t\}$ et $\tilde{G} = \mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / t = 0\}$ avec $e_3 = (0,0,1,0)$.
est un supplémentaire de G

3. $(x,y,z,t) \in H \iff \exists(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x = -\lambda + \nu \\ y = \lambda + \mu + \nu \\ z = 2\lambda + \nu \\ t = \mu \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \exists(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x = -\lambda + \nu \\ y = \lambda + \mu + \nu \\ z - x = 3\lambda \\ t = \mu \end{cases}$

$\iff \exists(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} x = -\frac{1}{3}(z-x) + y - \frac{1}{3}(z-x) - t \\ \nu = y - \lambda - \mu = y - \frac{1}{3}(z-x) - t \\ \lambda = \frac{1}{3}(z-x) \\ \mu = t \end{cases}$ La première ligne donne une équation de compatibilité.

$\iff \frac{1}{3}x + y - \frac{2}{3}z + t = 0$

$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + 3y - 2z + 3t = 0\}$

Exercice 4 :

1. $P \in F \Leftrightarrow$ 0 et 1 sont racines de P.

(Pour comprendre ce qui se passe vous pouvez d'abord regarder le cas $n=3$).

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

$P \in F \Leftrightarrow \begin{cases} P(0)=0 \\ P(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a_0 = 0 \\ a_0 + \dots + a_n = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -a_2 - \dots - a_n \end{cases}$

$\Leftrightarrow P(X) = a_2(X^2 - X) + a_3(X^3 - X) + \dots + a_n(X^n - X) = \sum_{k=2}^{n} a_k (X^k - X)$

donc $F = Vect(X^2 - X, X^3 - X, \dots, X^n - X)$ et $(X^k - X)_{k \in [\![2,n]\!]}$ est une famille génératrice de F

Cette famille est echelonnée en degré, elle est donc libre

Finalement $\boxed{(X^k - X)_{k \in [\![2,n]\!]} \text{ est une base de } F}$

2. 1ère méthode :

× $\dim F = n-1$ $\dim G = 2$ (La famille génératrice $(X, X^2 - 1)$ est libre car echelonnée en degré).

donc $\dim F + \dim G = n - 1 + 2 = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$

× Soit $P \in F \cap G$: $P \in G$: $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ P(X) = \alpha X + \beta (X^2 - 1)$ $\Rightarrow \begin{cases} -\beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow P = 0$

$P \in F$ $P(0) = 0$ et $P(1) = 0$

donc $F \cap G \subset \{0\}$ et l'inclusion inverse est évidente donc $F \cap G = \{0\}$.

donc F et G sont supplémentaires.

2ème méthode : analyse - synthèse

Soit $P \in E$

analyse : on suppose qu'il existe $(P_1, P_2) \in F \times G$ tel que $P = P_1 + P_2$

$P_1 \in F$: $P_1(0) = 0 = P(0) - P_2(0) \Rightarrow P(0) = P_2(0)$ de même $P(1) = P_2(1)$

$P_2 \in G$: $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ P_2(X) = \alpha X + \beta (X^2 - 1)$

$\Rightarrow P_2(X) = P(1) X - P(0)(X^2 - 1)$

et $P_1 = P - P_2$. (on a donc l'unicité de la décomposition)

synthèse : On pose $P_2(X) = P(1) X - P(0)(X^2 - 1)$ et $P_1 = P - P_2$

On a bien $P = P_1 + P_2$, $P_2 \in G$ (évident)

$P_1(0) = P(0) - P(0) = 0$ et $P_1(1) = P(1) - P(1) = 0$ donc $P_1 \in F$

(on a donc vérifié l'existence de la décomposition)

3. On complète $(X, X^2 + 1)$ en une base de E. Il nous faut $n-1$ vecteurs ~~car~~

$H = Vect(1, X^3, X^4, \dots, X^n)$ convient (à justifier).

Jour 4

Cours 1:

1. $e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
2. $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
3. $\operatorname{sh}(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
4. $\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
5. $\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$
6. $\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$
7. $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
8. $\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$
9. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$
10. $\cos x \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$
11. $\operatorname{ch} x \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$
12. $\arctan x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

Exercice 2:

1. On va utiliser un DL de e^x à l'ordre 2 car il sera multiplié par x (ordre le plus petit dans $x - x^2$).

$$e^x(x - x^2) = x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

2. On va utiliser un DL de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 2 car il sera multiplié par x :

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}} \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^3 + o(x^3)$$

3. On va chercher un equivalent du numérateur puis un équivalent du dénominateur.

On a $x\tan x \underset{0}{\sim} x^2$ et $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$, on utilise donc les premiers termes du DL (⚠ on n'a pas le droit de sommer des equivalents.)

$$x\tan x - (\cos x - 1) = x^2 + o(x^2) - \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

donc $x\tan x - (\cos x - 1) \sim \frac{3}{2}x^2$

On a $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sim \frac{x}{2}$ donc $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \sim \frac{x^2}{4}$

et $\frac{x\tan x - (\cos x - 1)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \sim 6$

Exercice 3:

1. $x \underset{0}{=} o(\ln x)$ et $1 \underset{0}{=} o(\ln x)$ donc $\boxed{\ln x + 3x - 1 \underset{0}{\sim} \ln(x)}$

$\lim_{x \to 0} e^x - x + 3 = 4$ donc $\boxed{e^x - x + 3 \underset{0}{\sim} 4}$

$x^3 - 2x - 1 \underset{0}{\sim} -1$ et $x^2 + x + 1 \underset{0}{\sim} 1$ donc $\boxed{\frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 + x + 1} \underset{0}{\sim} -1}$

Remarque : en $+\infty$: $\ln x + 3x - 1 \underset{+\infty}{\sim} 3x$ $\quad e^x - x + 3 \underset{+\infty}{\sim} e^x$ $\quad \frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 + x + 1} \underset{+\infty}{\sim} x$.

2. On a $\sin x \sim x$ et $x\cos x \sim x$. Comme on ne soustrait pas les équivalents et que l'ordre est le même, on passe par les DL pour avoir l'ordre suivant.

$\sin x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $x\cos x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

donc $\sin x - x\cos x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\boxed{\sin x - x\cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}}$

- $\boxed{\frac{x+x^2}{\sqrt{x(2-x)}} \underset{0}{\sim} \frac{x}{\sqrt{2x}} \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}}$

- $e^x \underset{0}{\sim} 1$ et $x\ln x \underset{0}{\to} 0$ donc $x\ln x = o(e^x)$ et $e^x - 1 \sim x$

donc $\boxed{\frac{e^x + x\ln x}{e^x - 1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}}$

- $\boxed{\frac{\ln x - e^x + 1}{x^3 + x^4} \underset{0}{\sim} \frac{\ln x}{x^3}}$

- $(\sin x)^2 \underset{0}{\sim} x^2 \underset{0}{=} o(x)$ et $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

donc $\boxed{\frac{x + (\sin(x))^2}{\cos x - 1} \sim \frac{x}{-x^2/2} \sim -\frac{2}{x}}$

- $\boxed{\frac{e^x - \ln x}{x + \ln x} \underset{0}{\sim} -1}$

- $\boxed{\frac{\ln(1+x)}{xe^x + x^2} \sim \frac{x}{xe^x} \underset{0}{\sim} \frac{x}{x} = 1}$

3. - $\boxed{\frac{\ln x + x}{x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}}$

- $\boxed{\frac{e^x - x\ln x}{e^x - 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^x} \sim 1}$

- $\boxed{\frac{\ln x(x - \ln x)}{x + x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x\ln x}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}}$

- $\boxed{\frac{\ln x + \sin x}{x^2 + \cos x} \sim \frac{\ln x}{x^2}}$

- On pose $u = \frac{1}{x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} u = 0$ et $e^u = 1 + u + o(u)$

donc $e^{1/x} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$ et $e^{1/x} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

donc $\boxed{\frac{x - \ln x}{e^{1/x} - 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{1/x} \sim x^2}$

- On pose $u = \frac{1}{x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} u = 0$ et $e^u \underset{0}{=} 1 + u + o(u)$ $\cos(u) \underset{0}{=} 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$

donc $\cos(\frac{1}{x}) \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$ et $e^{1/x} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$

donc $\boxed{\cos(\frac{1}{x}) - e^{1/x} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{x}}$

Jour 5

Cours 1 :

1. Soit f une application de E dans F. On dit que f est une application linéaire si $\forall (u,v) \in E^2$ $f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\forall u \in E$ $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Caractérisation : f est linéaire ssi $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ $\forall (u,v) \in E^2$, $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.

2. $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \,/\, f(x) = 0_F\}$. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E.

3. $\operatorname{Im} f = \{f(x),\ x \in E\} = \{y \in F \,/\, x \in E\ y = f(x)\}$. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de F.

4. $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est injective ssi $\operatorname{Ker} f = \{0\}$
$f \in \mathcal{L}(E,F)$ est surjective ssi $\operatorname{Im} f = F$

5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors f est de rang fini et $\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = \dim E$
Rappel le rang de f est la dimension de l'image.

6. $f \in \mathcal{L}(E)$ et E de dimension finie.
$\Rightarrow$ f est bijective donc injective donc $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.
$\Leftarrow$ Supposons $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ (donc f est injective)
E est de dimension finie, on peut donc appliquer le théorème du rang :
$\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = \dim E$ or $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ donc $\dim \operatorname{Im} f = \dim E$
Or $\operatorname{Im} f \subset E$ ($f \in \mathcal{L}(E)$)
donc $\operatorname{Im} f = E$ et f est surjective.
f est injective et surjective donc bijective.

Exercice 2 :

1. Montrons que f est une application linéaire :
Soient $u, u' \in \mathbb{R}^3$ avec $u = (x,y,z)$ et $u' = (x',y',z')$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$f(\lambda u + u') = f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') = 2(\lambda x + x') + (\lambda z + z') = \lambda(2x + z) + 2x' + z'$
$= \lambda f(x,y,z) + f(x',y',z') = \lambda f(u) + f(u')$

f est donc une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

On a $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1,0,-2),(0,1,0))$ $\boxed{((1,0,-2),(0,1,0))}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Ker} f$ qui est clairement libre, c'est donc une base de $\operatorname{Ker} f$

$\boxed{\operatorname{Im} f = \mathbb{R}}$ donc f est une application linéaire surjective et non injective.

2. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda P + Q)(X) = 2(\lambda P + Q)(X) - (X+1)(\lambda P + Q)'(X)$$
$$= \lambda\, 2P(X) + 2Q(X) - \lambda (X+1) P'(X) - (X+1)Q'(X)$$ (la dérivée étant linéaire)
$$= \lambda\left[2P(X) - (X+1)P'(X)\right] + 2Q(X) - (X+1)Q'(X)$$
$$= \lambda f(P)(X) + f(Q)(X)$$

donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Il reste à vérifier que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $(X+1)P' \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Ker f :

soit $P \in \operatorname{Ker} f$ non nul avec $p = \deg P$ et a_p son coefficient dominant $(a_p \neq 0)$.

$P \in \operatorname{Ker} f$ donc $2P(X) = (X+1)P'(X)$

si P est constant alors $P' = 0$ et $P = 0$ exclus ici

Supposons P non constant.

$2P$ est de degré p et son coefficient dominant est $2a_p$

$(X+1)P'$ est de degré p et son coefficient dominant est pa_p.

Les deux polynômes sont égaux donc $2a_p = pa_p$ or $a_p \neq 0$ donc $p = 2$.

donc un polynôme non nul du noyau est de degré 2.

Cherchons les polynômes de degré 2 qui conviennent.

$P(X) = aX^2 + bX + c$

$$f(P)(X) = 0 \iff 2aX^2 + 2bX + 2c - 2aX^2 - bX - 2aX - b = 0$$
$$\iff (b-2a)X + 2c - b = 0 \iff \begin{cases} b = 2a \\ b = 2c \end{cases}$$

$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X^2 + 2X + 1)$ $\boxed{(X^2+2X+1)}$ est une famille génératrice et libre de Ker f, c'est une base de Ker f !

Im f :

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(1), f(X), \dots, f(X^n))$

donc $(f(1), f(X), \dots, f(X^n))$ est une famille génératrice de Im f

d'après le théorème du rang ($\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie),

$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \operatorname{Ker} f = n + 1 - 1 = n$

donc un des vecteurs $f(X^i)$ est combinaison des autres.

on remarque que $f(X^2) = -2X = -2f(X) - f(1)$

donc $\boxed{(f(1), f(X), f(X^3), \dots, f(X^n)) \text{ est une base de Im } f}$ (famille génératrice de n vecteurs de Im f qui est de dimension n).

f est ni injective, ni surjective.

3. $\forall (M,N)\in M_n(\mathbb{R})$ $\quad {}^t(M+N) = {}^tM + {}^tN$ et ${}^t(\lambda M) = \lambda\, {}^tM$
donc f est une application linéaire de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même.
c'est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

$\boxed{\operatorname{Ker} f = \{0\} \text{ et } \operatorname{Im} f = M_2(\mathbb{R})}$ donc f est bijective (On a $f\circ f = id$, donc $f^{-1} = f$), c'est un automorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3 :

1. (e_1,e_2) est une famille libre. Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ / $\lambda e_1 + \mu e_2 = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda+\mu=0 \\ \lambda+2\mu=0 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow L_1-2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda=0 \\ \mu=0 \end{cases}$

(e_1,e_2) est une famille libre de 2 vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2, c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

2. $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $u = x(1,0)+y(0,1) = x\left(-\frac{1}{3}e_1+\frac{2}{3}e_2\right)+y\left(\frac{2}{3}e_1-\frac{1}{3}e_2\right)$
$= \frac{1}{3}(2y-x)e_1 + \frac{1}{3}(2x-y)e_2$

$f(u) = \frac{1}{3}(2y-x)f(e_1) + \frac{1}{3}(2x-y)f(e_2) = \left(\frac{1}{3}(2y-x), \frac{1}{3}(y+x), \frac{1}{3}(2x-y)\right)$.

3. Après calcul (à détailler) $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$
$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2)) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$
$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$ qui est clairement libre, c'est donc une base de $\operatorname{Im} f$.

4. $\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

Exercice 4 :

1. a. $(x,y,z)\in F \Leftrightarrow (f-id)(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow f(x,y,z)-(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$
$\Leftrightarrow x+y+z=0 \Leftrightarrow x=-y-z \Leftrightarrow u=(x,y,z) = y(-1,1,0)+z(-1,0,1)$

$F = \operatorname{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))$. ~~Don~~
$((-1,1,0),(-1,0,1))$ est une famille libre (car les vecteurs sont non-colinéaires) et une famille génératrice de F donc c'est une base de F

$u=(x,y,z)\in G \Leftrightarrow f(x,y,z)-4(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z \Leftrightarrow u=z(1,1,1)$

On en déduit $G=\mathrm{Vect}((1,1,1))$ et $(1,1,1)$ est une base de G

2. On constate que $((-1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ (à détailler) donc $F=\mathrm{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))$ et $G=\mathrm{Vect}(1,1,1)$ sont supplémentaires.

Jour 6

Cours 1

Le théorème de la limite monotone pour les suites

Hypothèses	Conclusion
• $(u_n)_n$ suite réelle croissante et majorée	$(u_n)_n$ converge
• $(u_n)_n$ suite réelle croissante non majorée	$(u_n)_n$ tend vers $+\infty$

(On a des résultats analogues pour des suites décroissantes).

Théorème de la limite monotone pour les fonctions

Hypothèses	Conclusion
f une fonction croissante sur un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$	f admet une limite à gauche en b (et à droite en a).
- si de plus f est majorée au voisinage de b	- $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ existe et est réel
- si de plus f n'est pas majorée au voisinage de b	- $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$

(on a des résultats analogue à droite en a)

Le théorème d'encadrement pour les suites

Hypothèses	Conclusion
(u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles Si à partir d'un certain rang N, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$ (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$	alors $(v_n)_n$ converge vers ℓ.

Le théorème des suites adjacentes

Hypothèses	Conclusion
$(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles l'une est croissante et l'autre décroissante $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$	$(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite.

Cours 2

1. $u_n \sim v_n \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ $\qquad$ $u_n = o(v_n) \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$

2. Dans le 1er cas le quotient $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers 0 alors que dans le 2em il est seulement borné.
   On a $\quad u_n = o(v_n) \implies u_n = O(v_n)$

3. Supposons $u_n \sim v_n$.

Il existe une suite (η_n) convergeant vers 1 telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \eta_n v_n$

donc $u_n = v_n + (\eta_n - 1) v_n$ et comme $\lim_{n\to+\infty} (\eta_n - 1) = 0$

on a $u_n - v_n = o(v_n)$ et $u_n = v_n + o(v_n)$

Supposons que $u_n = v_n + o(v_n)$

Alors il existe $(\varepsilon_n)_n$ convergeant vers 0 telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = v_n + \varepsilon_n v_n$

d'où $u_n = (1+\varepsilon_n) v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} 1+\varepsilon_n = 1$ donc $u_n \sim v_n$.

Exercice 3

1. sans DL : $\boxed{u_n \sim -\sqrt{n}}$ $\boxed{v_n \sim 1}$

posons $u = \frac{1}{n^2}$ alors $\lim_{n\to+\infty} u = 0$ et $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$

donc $\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) - \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$

Posons $X = \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\ln(1+X) = X + o(X)$

donc $w_n = \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$ et $\boxed{w_n \sim \frac{1}{n^4}}$.

Pour étudier $(a_n)_n$ il faut passer à l'exponentielle. $a_n = e^{n\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}$

posons $u_n = n\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)$

On a $u_n = n\left(\frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

et $\lim_{n\to+\infty} a_n = e^0 = 1$ par continuité de l'exponentielle.

donc $\boxed{a_n \underset{+\infty}{\sim} 1}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2}\left(1 + o(1)\right)$

d'où $\sqrt{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}n}\sqrt{1+o(1)}$ et $\boxed{b_n \sim \frac{1}{\sqrt{2}n}}$

2. $n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

On $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$ et $\ln(1+u) \underset{0}{=} u + o(u)$

donc $\ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{0}{=} -\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\boxed{\ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{-1}{6n^2}}$

$w_n = e^{n^2 \ln(n \sin(\frac{1}{n}))} \underset{\infty}{=} e^{n^2(-\frac{1}{6n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} = e^{-\frac{1}{6} + o(1)} = e^{-1/6} e^{o(1)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-1/6}$ par continuité de exp.

donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} w_n = e^{-1/6}}$

Exercice 4 : $f : x \mapsto x^2 \ln(x+2) - x^2 \ln x$

On a $\ln(x+2) = \ln(x(1+\frac{2}{x})) = \ln x + \ln(1+\frac{2}{x})$

donc $f(x) = x^2 \ln(1+\frac{2}{x})$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$

donc $f(x) = x^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2x - 2 + o(1)$

Ainsi $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (2x-2) = 0$ et $\boxed{\text{la courbe de } f \text{ admet une asymptote oblique d'équation } y = 2x-2 \text{ au voisinage de } +\infty}$

Pour avoir la position relative courbe/asymptote, on cherche le signe de $f(x) - (2x-2)$ au voisinage de $+\infty$. Pour cela on va à l'ordre suivant dans le DL, pour avoir un équivalent de $f(x) - (2x-2)$ en $+\infty$

Pour $x > 0$ $f(x) = 2x - 2 + \frac{4}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $f(x) - (2x-2) \sim \frac{4}{3x}$

et au voisinage de $+\infty$ $f(x) - (2x-2) \geq 0$

$\boxed{\text{La courbe est au dessus de l'asymptote au voisinage de } +\infty}$

Exercice 5

1. L'étude du dénominateur exclut 0 et 1 de l'ensemble de définition.
   Le numérateur est défini ssi $1 - x^2 > 0$ ssi $x \in]-1, 1[$
   $\boxed{D_g =]-1, 0[\cup]0, 1[}$

2. Pour montrer que g est prolongeable en 0, on cherche un équivalent :
   $g(x) \underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{x^2} = -1$ donc <u>g est prolongeable en 0 en posant $g(0) = -1$</u>

Om cherche un DL à l'ordre 1 pour prouver que le prolongement de g est dérivable en 0. De plus l'ordre 2 permet de positionner tangente et courbe.

On a $\ln(1-x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ et $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$

donc $g(x) = \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} \frac{1}{1-x} = \left(-1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 + x + x^2 + o(x^2)\right)$

$= -1 - x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$

$\boxed{g \text{ est donc dérivable en } 0 \text{ et } g'(0) = -1}$. $\boxed{\text{La tangente au point d'abscisse } 0 \text{ a pour équation } y = -x - 1}$

$g(x) - (-x-1) \underset{0}{\sim} -\frac{3}{2}x^2$ et les deux fonctions ont le même signe au voisinage de 0.

$\boxed{\text{La courbe est en dessous de la tangente au voisinage de } 0}$

3 en 1^- :

On a $g(x) = \frac{\ln((1-x)(1+x))}{x^2(1-x)} \underset{1^-}{\sim} \frac{\ln(2(1-x))}{1-x} \sim \frac{\ln(1-x)}{1-x}$ car $\ln(2(1-x)) = \ln 2 + \ln(1-x) \underset{1^-}{\sim} \ln(1-x)$

$\lim\limits_{x \to 1^-} 1-x = 0$ et $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\ln u}{u} = -\infty$ donc par croissance comparée

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{\ln(1-x)}{1-x} = -\infty$ et g n'admet pas de limite finie en 1^-

et $\boxed{g \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } 1^-}$

en -1^+ : $g(x) \underset{-1^+}{\sim} \frac{\ln(2(1+x))}{2} \underset{-1^+}{\sim} \frac{\ln(1+x)}{2}$ donc $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = -\infty$

$\boxed{g \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } -1.}$