Questions de cours

Exercice 1 (Quantificateurs)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire les phrases suivantes à l'aide des quantificateurs et des connecteurs ou en langage courant.

(a) Pour tous réels a et b, il existe un réel compris entre a et b.

(b) Il existe un entier compris entre $\sqrt{2}$ et π.

(c) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$.

(d) $\exists! x \in [0,1], f(x) = 0$.

Exercice 2 (Tracer une courbe)
Tracer les courbes d'équation

(a) $y = 3$ (b) $y = 2x + 1$ (c) $y = 2x^2 - 1$

Exercice 3 (Fractions)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

(a) $\dfrac{2x-1}{x^2+1} = 2.$ (b) $\dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{x}{x+2}.$ (c) $\dfrac{x+2}{x+1} < \dfrac{x}{x+1}.$

Exercice 4 (Racines Carrées)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

(a) $\sqrt{x^2+9} = 5.$ (b) $\sqrt{x-4} > 2.$ (c) $\sqrt{x+5} > -1.$

Exercice 5 (Valeur absolue)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

(a) $|x+1| = 2.$ (b) $|2x+3| - |2-x| = 1.$ (c) $|x| > 2$

Exercice 6 (Puissance)
Écrire les résultats sous la forme 3^n

(a) $A = 9 \times 3^k$ (b) $B = \dfrac{3^k}{9}$ (c) $C = \dfrac{(3\sqrt{3})^4}{(3^2 \times 3)^2}$

Exercice 7 (Fonction partie entière)
Trouver le plus petit entier n tel que

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n < 10^{-4}$$

Exercice 8 (Domaines de définitions)
Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes.

(a) $f : x \to \dfrac{1}{x^3 - 2x}$ (b) $g : x \to \sqrt{x-2}$ (c) $h : x \to \ln(x^2 - 4).$

Déterminer le domaine de définition

Exercice 9
Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes.

(a) $f : x \to \dfrac{1}{x^2 - 3x - 4}$ (b) $g : x \to \sqrt{x^2+1}$ (c) $h : x \to \ln(e^x - 1).$

Exercice 10 (*)
Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes.

(a) $f : x \to \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ (b) $g : x \to \ln(x)\sqrt{x-2}$ (c) $h : x \to \ln\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)$.

Exercice 11 (**)
Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes.

(a) $f : x \to \ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ (b) $g : x \to \sqrt{x^2-p^2}$, $p \in \mathbb{R}$.

Manipuler les quantificateurs

Exercice 12 (Quantificateurs et fonction)
Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Relier les expressions suivantes avec leur version en utilisant les quantificateurs :

f ne s'annule jamais. •	• $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)$.
f est positive •	• $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$.
f est croissante. •	• $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$.
f est strictement décroissante. •	• $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
f n'est pas la fonction nulle •	• $\exists! x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
L'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution •	• $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f(-x)$.
f est une fonction impaire. •	• $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
f est une fonction paire. •	• $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$.

Exercice 13 (**)
Démontrer les propriétés suivantes.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists! y \in \mathbb{R}_+, x = y^2$. (b) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 \geq x$.

Manipuler les valeurs absolues

Exercice 14
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

(a) $|x| = 5$ (b) $|x+1| - 1 = |x-1|$ (c) $|x+1| \leq 3$

Exercice 15 (*)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

(a) $|x^2-1| + |x-3| = 4$ (b) $|5x+3| > -4$ (c) $|2x-1| \leq |x-1|$

Exercice 16 (**)
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Montrer que la dérivée de la fonction $f : x \to \ln(|x^2-1|)$ est

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}.$$

Manipuler la fonction partie entière

Exercice 17
Trouver le plus petit entier n tel que $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n < 10^{-6}$

Exercice 18 (*)
Soit une suite (u_n) vérifiant $|u_n - e| < \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. Déterminer un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de e à 10^{-3} près.

Exercice 19 (**)
Calculez selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$

$$G(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor.$$

Exercice 20 (***)
Montrer que, $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$