Correction Feuille Exercice 1

Déterminer le domaine de définition

Exercice 9

1. On résout l'équation $x^2 - 3x - 4 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 9 - 4 \times (-4) = 25$. Il y a donc 2 solutions
$$x_1 = \frac{3-5}{2} = -1 \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{3+5}{2} = 4$$
On en déduit que
$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de } f \text{ est } D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 4\}}$$
2. On résout l'équation $x^2 + 1 \geq 0$. Or pour tout x réel, $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 0$. Donc
$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de } g \text{ est } D_g = \mathbb{R}}$$
3. On résout l'équation
$$\begin{aligned} e^x - 1 > 0 &\iff e^x > 1 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$
Donc
$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de } h \text{ est } D_h = \mathbb{R}_+^*}$$

Exercice 10 (*)

1. On résout l'inéquation
$$x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$$
On résout également l'équation
$$\sqrt{x-1} = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$$
En combinant les deux, on en déduit que le domaine de définition de f est
$$\boxed{D_f =]1; +\infty[.}$$
2. On résout l'inéquation
$$x - 2 \geq 0 \iff x \geq 2$$
On a donc le domaine de définition de g est
$$\boxed{D_g = \mathbb{R}_+^* \cap [2; +\infty[= [2; +\infty[\ .}$$
3. On résout l'inéquation $\dfrac{x+3}{x-1} > 0$ à l'aide d'un tableau de signe

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\dfrac{x+3}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

On en déduit donc le domaine de définition de h

$$\boxed{D_h =]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[.}$$

Exercice 11 (**)

1. On étudie le domaine de définition de f par un tableau de signe

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de e^x-1		$-$	0	$+$	
Signe de x		$-$	0	$+$	
Signe de $\dfrac{e^x-1}{x}$		$+$	$\Vert$	$+$	

Le domaine de définition de f est $\boxed{D_f = \mathbb{R}^*}$.

2. On résout l'équation $x^2 - p^2 \geq 0 \iff (x-p)(x+p) \geq 0$. Il y a deux cas.

Tout d'abord, si $p = 0$, $x^2 \geq 0$ est toujours vérifié, l'ensemble de définition de g dans ce cas est $\boxed{D_g = \mathbb{R}}$.

Supposons désormais que $p \neq 0$. On résout l'inéquation $x^2 - p^2 \geq 0$ à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$		$-\lvert p\rvert$		$\lvert p\rvert$		$+\infty$
Signe de x^2-p^2		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de } g \text{ est donc } D_g =]-\infty; -|p|] \cup [|p|; +\infty[.}$$

Manipuler les quantificateurs

Exercice 12 (Quantificateurs et fonction)
Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Relier les expressions suivantes avec leur version en utilisant les quantificateurs :

f ne s'annule jamais. •	• $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)$.
f est positive •	• $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$.
f est croissante. •	• $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$.
f est strictement décroissante. •	• $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
f n'est pas la fonction nulle •	• $\exists ! x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
L'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution •	• $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f(-x)$.
f est une fonction impaire. •	• $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
f est une fonction paire. •	• $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$.

Exercice 13 (**)

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On cherche un réel y positif tel que $x = y^2$. On pose alors $y = \sqrt{x}$. Ce réel est unique.
$$\boxed{\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}_+, \exists ! y \in \mathbb{R}_+, x = y^2.}$$
2. On cherche un réel tel que tout nombre élevé au carré soit plus grand que ce réel. On pose $x = 0$. Dans ce cas, $\forall y \in \mathbb{R}$, $y^2 \geq 0$. On conclut donc
$$\boxed{\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 \geq x.}$$

Manipuler les valeurs absolues

Exercice 14

1. On résout l'équation
$$|x| = 5 \iff x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -5$$
$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_1 = \{-5; 5\}.}$$
2. On résout l'équation $x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1$ et $x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$. On a donc 3 cas :
   (a) **Cas où $x < -1$:** L'équation s'écrit alors
   $$\begin{aligned} |x+1| - 1 = |x-1| &\iff -(x+1) - 1 = -(x-1) \\ &\iff -x - 2 = -x + 1 \\ &\iff -2 = 1 \end{aligned}$$
   Cette équation n'a donc aucune solution.
   (b) **Cas où $-1 \leq x < 1$:** L'équation s'écrit alors
   $$\begin{aligned} |x+1| - 1 = |x-1| &\iff (x+1) - 1 = -(x-1) \\ &\iff x = -x + 1 \\ &\iff 2x = 1 \\ &\iff x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$
   Il y a alors une solution sur $[-1; 1[$: $x = 1/2$.

(c) **Cas où** $1 \leq x$ **:** L'équation s'écrit alors

$$\begin{aligned} |x+1|-1=|x-1| &\Longleftrightarrow x+1-1=x-1 \\ &\Longleftrightarrow x=x-1 \\ &\Longleftrightarrow 0=-1 \end{aligned}$$

Cette équation n'a donc aucune solution.

$$\boxed{\text{Au final l'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_2=\left\{\frac{1}{2}\right\}.}$$

3. On a ici deux cas :

(a) **Cas ou** $x \leq -1$ **:** Dans ce cas, l'équation devient

$$\begin{aligned} |x+1| \leq 3 &\Longleftrightarrow -(x+1) \leq 3 \\ &\Longleftrightarrow -x-1 \leq 3 \\ &\Longleftrightarrow -x \leq 4 \\ &\Longleftrightarrow x \geq -4 \end{aligned}$$

Le premier ensemble de solution est $[-4;-1]$

(b) **Cas ou** $x > -1$ **:** Dans ce cas, l'équation devient

$$\begin{aligned} |x+1| \leq 3 &\Longleftrightarrow x+1 \leq 3 \\ &\Longleftrightarrow x \leq 2 \end{aligned}$$

Le deuxième ensemble de solution est $]-1;2]$

$$\boxed{\text{Ainsi l'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_3=[-4;2].}$$

Exercice 15 (*)

1. On résout l'équation $|x^2-1|+|x-3|=4$. Afin de voir quels sont les cas possibles, on utilise le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
Signe de x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	

(a) <u>**1er** Cas : $x \in]-\infty;-1]$ ou $x \in [1;3]$.</u> On s'aperçoit que dans ces deux cas, x^2-1 est positif et $x-3$ est négatif. Donc

$$\begin{aligned} |x^2-1|+|x-3|=4 &\Leftrightarrow (x^2-1)-(x-3)=4 \\ &\Leftrightarrow x^2-1-x+3-4=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-x-2=0 \end{aligned}$$

Le discriminant lié à cette équation du second degré est $\Delta=1-4\times1\times(-2)=9$. Les deux solutions sont alors $x_1=\dfrac{1-3}{2}=-1$ et $x_2=\dfrac{1+3}{2}=2$. Comme $-1 \in]-\infty;-1]$ et $2 \in [1;3]$. On en déduit que sur cet intervalle, $\boxed{\text{l'équation a deux solutions } x=-1 \text{ et } x=2.}$

(b) **2nd** Cas : $-1 \leq x \leq 1$. Dans ce cas, les deux quantités sont négatives.

$$\begin{aligned} |x^2-1|+|x-3|=4 &\Leftrightarrow -(x^2-1)-(x-3)=4 \\ &\Leftrightarrow -x^2+1-x+3=4 \\ &\Leftrightarrow -x^2-x=0 \\ &\Leftrightarrow -x(x+1)=0 \end{aligned}$$

Cette équation du second degré a deux solutions -1 (qui était déjà une solution dans le précédent cas) et 0. Comme $0 \in [-1;1]$, on en déduit que sur cet intervalle, l'équation a une solution $x = 0$.

(c) **3ème** Cas : $x \geq 3$. Dans ce cas, les 2 quantités dans les valeurs absolues sont positives. Donc

$$\begin{aligned} |x^2-1|+|x-3|=4 &\Leftrightarrow (x^2-1)+(x-3)=4 \\ &\Leftrightarrow x^2+x-8=0 \end{aligned}$$

Le discriminant lié à cette équation du second degré est $\Delta = 1-4\times1\times(-8)=33$.Les deux solutions sont alors

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{33}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{33}}{2}$$

Or $\dfrac{-1-\sqrt{33}}{2} < 0$ donc cette solution n'est pas dans le domaine étudié. D'un autre côté,

$$\begin{aligned} \sqrt{33} < 6 &\iff -1+\sqrt{33} < 5 \\ &\iff \frac{-1+\sqrt{33}}{2} < \frac{5}{2} < 3 \end{aligned}$$

donc cette solution n'est pas dans l'intervalle étudié. On en déduit que sur cet intervalle, l'équation n'a pas de solution.

En conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \{-1;0;2\}$.

2. Résoudre $|5x+3| > -4$. Ceci est toujours respecté.

L'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.

3. Afin de voir quels sont les cas possibles, on utilise le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
Signe de $2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	

(a) **1er Cas :** $x \leq \frac{1}{2}$**.** Dans ce cas, les 2 quantités dans les valeurs absolues sont négatives. Donc

$$\begin{aligned} |2x-1| \leq |x-1| &\Leftrightarrow -(2x-1) \leq -(x-1) \\ &\Leftrightarrow -2x+1 \leq -x+1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x \end{aligned}$$

On en déduit que l'intervalle $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ est solution.

(b) **2nd Cas : $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.** Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
|2x-1| \leq |x-1| &\Leftrightarrow (2x-1) \leq -(x-1) \\
&\Leftrightarrow 2x-1 \leq -x+1 \\
&\Leftrightarrow 3x \leq 2 \\
&\Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

On en déduit que l'intervalle, $\left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$ est solution.

(c) **3ème Cas : $x \geq 1$.** Dans ce cas, les 2 quantités dans les valeurs absolues sont positives. Donc

$$\begin{aligned}
|2x-1| \leq |x-1| &\Leftrightarrow (2x-1) \leq (x-1) \\
&\Leftrightarrow x \leq 0
\end{aligned}$$

On en déduit que sur cet intervalle, $\boxed{\text{l'inéquation n'a pas de solution.}}$

$$\boxed{\text{En conclusion, l'ensemble des solutions est } \left[0; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right] = \left[0; \frac{2}{3}\right]}$$

Exercice 16 (**)
On regarde lorsque x^2-1 est positif. Or $x^2-1 \geq 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$. La fonction f est dérivable sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$ et sur cet intervalle $f(x) = \ln(x^2-1)$

$$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, \ f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

La fonction f est également dérivable sur $]-1; 1[$. Sur cet intervalle, $f(x) = \ln(1-x^2)$ et

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1; 1[, \ f'(x) &= \frac{-2x}{1-x^2} \\
&= \frac{2x}{x^2-1}
\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}}$$

Manipuler la fonction partie entière

Exercice 17
On résout l'inéquation

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-6} &\Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n < \ln(10^{-6}) \\
&\Longleftrightarrow -n\ln(2) < -6\ln(10) \\
&\Longleftrightarrow n > \frac{6\ln(10)}{\ln(2)}
\end{aligned}$$

Le plus petit entier tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-6}$ est

$$\boxed{n_0 = \left\lfloor \frac{6\ln(10)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1}$$

Exercice 18 (*)
Soit une suite (u_n) vérifiant $|u_n - e| < \left(\frac{1}{3}\right)^n$. On résout alors l'inéquation

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3}\right)^n < 10^{-3} &\iff \ln\left(\frac{1}{3}\right)^n < \ln(10^{-3})\\ &\iff -n\ln(3) < -3\ln(10)\\ &\iff n > \frac{3\ln(10)}{\ln(3)}\end{aligned}$$

En choisissant $n_0 = \left\lfloor \frac{3\ln(10)}{\ln(3)} \right\rfloor + 1$, on conclut

$$\boxed{u_{n_0} \text{ soit une valeur approchée de } e \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

Exercice 19 (**)

1. **Cas n°1 : Si x est un entier :** Alors
$$\boxed{G(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = x + (-x) = 0}$$
2. **Cas n°2 : Si x n'est pas un entier :** Alors $x = n + d$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $d \in]0,1[$. Dans ce cas, $\lfloor x \rfloor = n$ et $\lfloor -x \rfloor = -n - 1$. Donc
$$\boxed{G(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = n + -n - 1 = -1.}$$

Exercice 20 (***)
Soient x et y deux réels. D'après le cours

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \quad \text{et} \quad y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$$

Donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x + y \rfloor + 1$, c'est à dire que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor < \lfloor x + y \rfloor + 1$. Or, comme ces deux quantités sont entières, ceci est équivalent à

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor}$$