Chapitre 9
Variable aléatoires sur des espaces de probabilités finies

Savoir Faire:

- Déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète finie.
- Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire
- Reconnaitre une loi uniforme, de Bernoulli, Binomiale.

On récapitule dans le tableau suivant ce qu'on utilise en probabilités :

	Expérience	Univers	Évènements	Loi de Probabilité	Probabilités
Définition					
Objet math.					
Notation(s)					
Exemple					

I - Variable aléatoire

Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ?

Exemple 1 (*Expérience n° 1*)

On lance deux dés à 6 faces. Quelle est la probabilité de faire 2 fois 6 ? De faire 1 seul fois 6 ?

Exemple 2 (*Expérience n° 2*)

On joue à un jeu. Chaque partie coute un euro. Le jeu consiste à lancer deux dés à 6 faces. Si l'on obtient un seul 6, on gagne 3 euros. Si l'on obtient deux 6, c'est le jackpot et on gagne 40 euros. Quelle est la probabilité de gagner 39 euros ? de gagner 2 euros ? de perdre ?

Définition 1 (*Variable aléatoire*)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.

On lance n fois un dé à 6 faces. Donnez des exemples de variable aléatoire associée à cette expérience.

Avant toute étude d'une variable aléatoire, on cherchera son support :

Définition 2 (*Support d'une VA*)

Remarque : Si on note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, l'évènement $(X = x_i)$ est constitué des issues pour laquelle la variable aléatoire X prend la valeur x_i. On trouvera les notations $(X \in I)$ avec $I \subset X(\Omega)$ ou plus fréquemment $(X \leq x_i)$.

Exercice 1

Tableau Bilan

	Variable Aléatoire	Support	Évènements	Probabilité
Définition				
Objet math.				
Notation(s)				
Exemple				

Que dire des $(X = i)$ pour tous les $i \in X(\Omega)$?

Proposition 1 (*Système complet associé à X*)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω.

Remarque : Cela signifie que

Définition 3 (*Loi de probabilité*)

Exercice 2

II - Paramètres d'une variable aléatoire

1 Espérance

Comment calcule-t-on une moyenne ?

Définition 4 (*Espérance d'une variable aléatoire*)

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Remarque : L'espérance est le pendant probabiliste de la moyenne en statistique.

Exercice 3

Proposition 2 (*Bornes de l'espérance*)

Si $X(\Omega) \subset [p, q]$ alors $\quad p \leq E(X) \leq q$.

Remarque : Notamment, si X est positive, $E(X) \geq 0$

Démonstration directe de la propriété

Proposition 3 (*Linéarité de l'espérance*)

Soient X et Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et a, b deux réels.

2 Formule de transfert

Comment calculer $E(X^2)$?

Théorème 1 (*Formule de transfert pour X^2*)

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ alors

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 P(X = x_i)$$

Exercice 4

3 Variance

Quel est la variance d'une VA, l'écart type ?

Définition 5 (*Variance*)

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

Théorème 2 (*Formule de Koenig-Huygens*)

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

Démonstration directe de la formule et Exercice 5

Que dire de $Var(aX+b)$?

Proposition 4 ()

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ admettant une variance. Alors, pour tous réels a et b,

Démonstration de la propriété

III - Loi usuelle finie

1 Loi certaine

Une urne contient n boules, indiscernables au toucher, de couleurs différentes et portant toutes le numéro 2 et on tire une boule. On note X le numéro tiré.

Définition 6 (*Loi certaine*)

On dit que la variable aléatoire X suit la loi certaine si et seulement s'il

Théorème 3 (*Espérance et Variance de la loi certaine*)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire suivant la loi certaine égale à a.

Exercice 6

2 Loi uniforme

On lance un dé à 6 faces et on note X la variable aléatoire associée au numéro de la face obtenue.

Définition 7 (*Loi uniforme*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$

Théorème 4 (*Espérance et Variance de la loi uniforme*)

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Exercice 7

Exercice 8

3 Loi de Bernoulli

On lance une pièce truquée ayant pour probabilité $p \in]0,1[$ de faire pile. On note X la variable aléatoire valant 1 si on fait pile, 0 sinon.

Définition 8 (*Loi de Bernoulli*)

Soit $p \in]0,1[$. On dit que la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p

Théorème 5 (*Espérance et Variance de la loi de Bernoulli*)

Soit $p \in]0,1[$ et $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Exercice 9 et *Exercice 10*

4 Loi Binomiale

On lance n pièces truquées ayant pour probabilité $p \in]0,1[$ de faire pile. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de pile.

Définition 9 (*Loi Binomiale*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On dit que la variable aléatoire X suit la loi Binomiale de paramètre (n,p)

Exemple 3 (*Fondamental*)

Remarque : Il s'agit bien d'une loi de probabilité

Exercice 11

Remarque : Dans le cas $n = 1$, on retrouve la loi de Bernoulli de paramètre p.

Théorème 6 (*Espérance et Variance de la loi binomiale*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$ et $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Démonstration de l'espérance de 2 manières et Exercice 12