


Chapitre 8 : Limites de fonctions

Savoir Faire:

- Calculer la limite d'une fonction (sans indétermination).
- Calculer la limite d'une fonction (avec indétermination)
- Déterminer une limite avec des inégalités

 Intuitivement, on dit qu'une quantité dépendant d'un paramètre (par exemple le temps) admet une limite finie ℓ en un point a , si cette quantité « se rapproche de plus en plus de ℓ » lorsque le temps se rapproche de a . Il est possible de formuler de façon très précise l'expression « se rapproche de plus en plus de ».

Ce fut le centre des travaux de 3 mathématiciens célèbres du XIX^e siècle : Cauchy (Français, 1789 - 1853), Bolzano (Empire d'Autriche, 1781-1848) et Weierstrass (Empire Allemand, 1815-1897). Ils s'attachèrent à donner une définition rigoureuse des limites.



I - Limites à l'infini

1 Limite finie en l'infini

On dit que la fonction f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ ssi

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \in D_f, x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Définition 1 (Limites finie en l'infini)

On dit que la fonction f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si

Exemple 1 (*Limite usuelle*)

Exercice 1

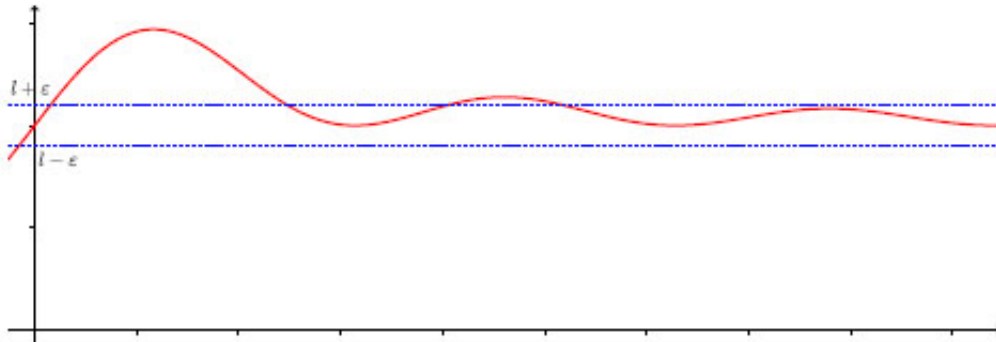

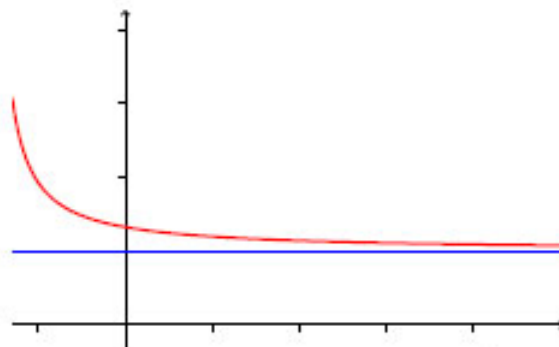


Figure 1 – Exemple de limite finie en l’infini

 **Remarque :** On définit de même la limite en $-\infty$.

Définition 2 (*Asymptote horizontale*)

Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (où $\ell \in \mathbb{R}$). Ainsi la droite d’équation $y = \ell$ est appelée asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (même chose en $-\infty$).



On dispose ici d’une asymptote horizontale d’équation $y = \ell$.



Pour étudier la position de la courbe de f par rapport à l’asymptote $y = \ell$,

Exercice 2

Définition 3 (*Limite infinie en l'infini*)


Si, pour tout nombre A (aussi grand qu'on veut),

 **Remarque :** En langage mathématique on écrit donc

$$\forall A > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \geq M \implies f(x) \geq A$$

Exemple 2 (*Limite usuelle*)

Exercice 3

 **Remarque :** On définit de même $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

II - Limites en un point

1 Limite finie en un point.

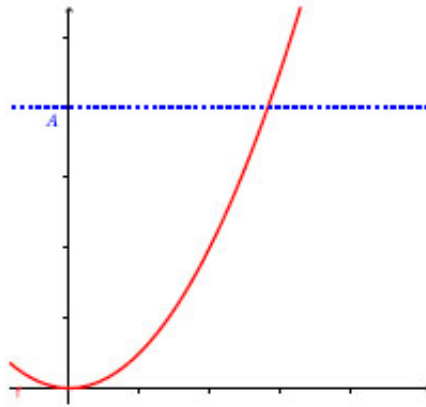


Figure 2 – Exemple de limite infinie en l’infini

Définition 4 (*Limite finie en un point.*)

Soient x_0 et ℓ deux réels.

☞ **Remarque** : En langage mathématique on écrit donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, |x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Exemple 3 (*Limites finies en un point*)

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x + 1 =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 2x + 1 =$$

2 Limite infinie en un point.

Définition 5 (*Limite infinie en un point.*)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

☞ **Remarque** : En langage mathématique on écrit donc

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, |x - x_0| < \alpha \implies f(x) > A.$$

☞ **Remarque** : On définit de même $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Exemple 4 ()

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \ln(e^{x^2} - 1) =$$

3 Limite à droite ou à gauche.

Définition 6 (*Limite à droite ou à gauche.*)


Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Si on s'intéresse à la limite en x_0 , en imposant $x < x_0$, on parle de la limite à gauche en x_0 , et on note $\lim_{x \rightarrow x_0^-}$ ou $\lim_{x \nearrow x_0}$.
- Si on s'intéresse à la limite en x_0 , en imposant $x > x_0$, on parle de la limite à droite en x_0 , et on note $\lim_{x \rightarrow x_0^+}$ ou $\lim_{x \searrow x_0}$.

Proposition 1 ()

Soit f une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors f admet une limite en x_0 si et seulement si f admet des limites à gauche et à droite en x_0 et que ces limites sont les mêmes. Dans ce cas,

Exercice 4

 **Limites à droite ou à gauche.**

On est souvent amené à étudier des limites à droite et à gauche lorsque

- La fonction n'est définie que sur un intervalle et on regarde la limite au bord de cet intervalle.
- La fonction est définie de deux manières différentes selon les intervalles.

 *Exercice 5*

Définition 7 (*Asymptote verticale*)

 *Dessin*

III - Calculs de limites

1 Limites usuelles

Proposition 2 (*Fonctions usuelles*)

Fonctions	Limites à retenir
Puissances	
Inverse	
Racine carrée	
Logarithme	
Exponentielle	
Valeur absolue	

Proposition 3 (*Fonctions puissances*)

--

☞ **Remarque :** Toutes ces propriétés se retrouvent à partir de la formule de la puissance :
 $\alpha^\beta = e^{\beta \ln(\alpha)}$.

 *Exercice 6*

2 Opérations sur les limites

Proposition 4 (*Limite de $f + g$*)

$\lim g$	$\lim f$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'				
$+\infty$				
$-\infty$				

Exemple 5 ()

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x} = +\infty$$

Exercice 7

Proposition 5 (*Limite de $f \times g$*)

$\lim g$	$\lim f$	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$					
0					
$+\infty$					
$-\infty$					

Exemple 6 ()

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \sqrt{x} = +\infty$$

 *Exercice 8*

Proposition 6 (Limite de $\frac{f}{g}$)

$\lim g \backslash \lim f$	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$				
0^+				
0^-				
$+\infty$				
$-\infty$				

Exemple 7 ()

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = 0 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2 + 1}{x} = +\infty$$

 *Exercice 9*


3 Limite d'une fonction composée

Comment déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1}$?

Proposition 7 (Limite de fonctions composées)

Soient f, g, h trois fonctions telles que $f(x) = g(h(x))$ sur un intervalle I . Soient a, b, c des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Si $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ et $\lim_{X \rightarrow b} g(X) = c$, alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

 Déterminer la limite de $f(x) = g(h(x))$ en x_0

 Exemple précédent puis Exercice 10

4 Croissances comparées

Proposition 8 (*Croissances comparées*)

Pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

Proposition 9 (*Conséquence*)

Par passage à l'inverse, on obtient

 Exercice 11

Proposition 10 (*Croissances comparées*)

Pour tout $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$

 *Preuve directe de la dernière propriété*

 **Remarque :** On pourra retenir que l'exponentielle l'emporte sur les puissance qui l'emporte sur le logarithme.

Croissances comparées

| Pour utiliser les croissances comparées, il faut souvent faire un changement de variable pour s'y ramener.

 *Exercice 12*

IV - Lever les indéterminations

1 Cas $\infty - \infty$

Exemple 8 ()

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x - e^x$$



Indétermination $\infty - \infty$

- Si c'est un polynôme, on force la factorisation par le terme de plus haut degré.
- S'il y a une racine carrée, on multiplie par la quantité conjuguée.
- Sinon, on force la factorisation par le terme qui semble converger le plus rapidement.



Détermination des exemples et Exercice 13


2 Cas $0 \times \infty$

Exemple 9 ()

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ >}} (x^2 - 1) \ln(x - 1) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{x^3}$$

Indétermination $0 \times \infty$

— On fait un changement de variable afin de se ramener à une croissance comparée.

 *Détermination des exemples et Exercice 14*


3 Cas $\frac{\infty}{\infty}$

Exemple 10 ()

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x)} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^4}{e^{2x} - e^x + 3}$$

Indétermination $\frac{\infty}{\infty}$

- S'il s'agit d'une fraction rationnelle, on utilise le théorème sur les monômes de plus grand degré.
- On fait un changement de variable ou on fait des calculs pour faire apparaitre une croissance comparée
- Dans le cas général, on factorise au numérateur et au dénominateur par le terme qui croit le plus vite.

 *Détermination des exemples et Exercice 15*

4 Cas $\frac{0}{0}$

Exemple 11 ()


$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{(e^x - 1)^2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Indétermination $\frac{0}{0}$

- S'il s'agit d'une fraction rationnelle (ou assimilé)
 1. On cherche les racines du numérateur et du dénominateur.
 2. On factorise.
 3. On simplifie.
- Sinon, on regarde si c'est une limite connue.

Proposition 11 (*Taux d'accroissement*)

On a les limites suivantes

 *Détermination des exemples et Exercice 16*

V - Théorèmes de comparaison

1 Passage à la limite dans les inégalités

Proposition 12 ()

Soient f et g deux fonctions et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

— Si $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell'$ avec $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$ alors $\ell \geq \ell'$

— Si $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

— Si $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$

☞ **Remarque :** L'opération de passage à la limite est compatible avec les inégalités larges, mais pas aux inégalités strictes :

 *Contre exemple et Exercice 17*

2 Limite par encadrement

Théorème 1 (*Théorème d'encadrement ou théorème des gendarmes*)

Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0 et $\ell \in \mathbb{R}$.

Corollaire 1

Soient f et g deux fonctions telles que $|f(x) - \ell| \leq g(x)$. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

 *Exercice 18*