


Chapitre 7: Dénombrement

Savoir Faire:

- Calculer des probabilités à l'aide du dénombrement.
- Calculer avec des factorielles et des coefficients binomiaux

I - Loi uniforme

1 Cardinal d'un ensemble fini

 Dénombrer un ensemble, c'est compter les éléments de cet ensemble. On trouve des traces de dénombrement dans l'antiquité. Mais c'est en étudiant les jeux de hasard et le calcul des probabilités que le dénombrement se développe avec des Français comme Pascal ou Pierre de Fermat.

Définition 1 (Cardinal d'un ensemble fini)


Exemple 1 (Cardinaux simples)

$$card(\llbracket 1, n \rrbracket) = \quad , \quad card(\emptyset) = \quad , \quad card(\llbracket 0, n \rrbracket) = \quad , \quad card(\llbracket p, n \rrbracket) = \quad .$$

Proposition 1 ()

Soit A un sous-ensemble fini de E . Alors A est un ensemble fini et on sait de plus que $card(A) \leq card(E)$. Dans ce cas là, on sait par ailleurs que

$$A = E \implies card(A) = card(E).$$

 **Remarque :** On peut avoir $card(A) = card(E)$ avec $A \neq E$.

 *Donner deux ensembles ayant même cardinal mais qui sont différents*

2 Loi de probabilité uniforme

Définition 2 (*Loi uniforme*)

Dans le cas où tous les évènements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'ils sont équiprobables, ou que la loi de probabilité P est uniforme.

Exemple 2 (*Dé à 6 faces*)

La probabilité de tomber sur n'importe quelle face est $\frac{1}{6}$.

Proposition 2 (*Formule d'équiprobabilité*)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini muni d'une loi uniforme, alors

Exercice 1

3 Techniques de dénombrement générales

Proposition 3 (*Cardinal d'une union disjointe*)

Soient A et B deux sous-ensembles disjoints d'un ensemble fini E . Alors $A \cup B$ est un ensemble fini et

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

Exercice 2

Proposition 4 ()

Soient A_1, A_2, \dots, A_n n sous-ensembles de E deux à deux disjoints ($\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$) alors

$$\text{card} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{card}(A_i).$$

Exercice 3

Proposition 5 (*Crible de Poincaré*)

Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble fini E .

— $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

— $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Exercice 4

Théorème 1 ()

Soit A_1, \dots, A_n une partition de E , alors pour tout $B \in \mathcal{P}(E)$,

$$\text{card}(B) = \sum_{i=1}^n \text{card}(B \cap A_i)$$

🌀 **Remarque :** Dans le cas $n = 2$, la partition de E devient A, \bar{A} et le résultat du théorème :

$$\text{card}(B) = \text{card}(B \cap A) + \text{card}(B \cap \bar{A})$$

Exercice 5

Proposition 6 (*Cardinal du complémentaire*)

Soit A un sous-ensemble d'un ensemble fini E , alors :

$$\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$$

Exercice 6

II - Méthodes de dénombrement

1 Utilisation d'un problème jouet

Problème jouet

Dans toute la suite du cours, on va considérer l'expérience suivante. Dans un paquet, il y a n cartes numérotées de 1 à n . On tire alors p cartes de différentes façons :

1. En s'intéressant ou non à l'ordre des cartes tirées.
2. Avec/Sans remise des cartes une fois tirées.

On complétera alors le tableau suivant

p cartes tirées sur n	Avec ordre	Sans ordre
Avec Remise		
Sans remise		

2 Tirage avec ordre et remise

Définition 3 (*p-listes*)

Exercice 7

Proposition 7 (Cardinal du produit cartésien - Choix successifs.)

 *Exercice 8*

⊗ **Remarque** : L'ordre des éléments figurant dans la p-liste est important. Ainsi deux p-listes contenant les mêmes éléments dans des ordres différents sont différentes. Ex : $(2, 3, 4) \neq (3, 2, 4)$.

⊗ **Remarque** : Une p-liste peut contenir plusieurs fois le même élément. Ex : $(2, 3, 1, 2)$.

Théorème 2 (Nombre de p-listes)

 *Exercice 9*

3 Tirage avec ordre et sans remise

Définition 4 (Permutations)

On considère un ensemble E de cardinal n . Une **permutation de E** est un réarrangement des éléments de E . C'est à dire l'écriture des éléments de E dans un ordre différent.


Exemple 3 (Permutations)

Soit $E = \{a, b, c\}$. Les triplets (a, b, c) , (a, c, b) (b, c, a) sont des permutations de E .

Théorème 3 (Permutations)

Exercice 10

Définition 5 (Arrangements)

 **Remarque :** Dans ce cas, on a $0 \leq p \leq n$. On ne peut pas tirer plus de boules qu'il n'y en a.

Théorème 4 (Nombres d'arrangements)

Exercice 11


4 Tirage sans ordre et sans remise


Définition 6 (Combinaisons)

Soit E un ensemble de cardinal n .

Exemple 4 (Combinaisons)

Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$. Les ensembles $\{a, b, c\}$, $\{e, c, b\}$ et $\{a\}$ sont des combinaisons de E .

 **Remarque :** Les éléments d'une combinaison de p éléments de E sont deux à deux distincts donc $0 \leq p \leq \text{card}(E)$.

 **Remarque :** Puisque l'on considère des parties, L'ordre des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance : c'est ce qui différencie une combinaison d'un arrangement.

 Déterminer le nombres de combinaisons possibles.

Théorème 5 (Nombre de combinaisons)

Soit E est un ensemble de cardinal n .

Théorème 6 (Combinaisons avec répétitions (pas au programme))

Soit E est un ensemble de cardinal n . Le nombre de combinaisons avec répétitions de p éléments de E , noté Γ_n^p est égal à

$$\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!},$$

 Exercice 12

5 Propriétés des coefficients binomiaux.

Proposition 8 (Calculs avec les coefficients binomiaux)

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall p \in \{1, \dots, n\}$, on a :

1. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall p \in \{1, \dots, n-1\}$, on a :

1. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

2. $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}.$

 Exercice 13

Proposition 9 (*Triangle de Pascal*)

Pour tout n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$, on a :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Théorème 7 (*Formule du binôme de Newton*)

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple 5 (*Exercice*)

- Développez $(x + 2)^2$, $(x + 3)^3$
- Calculez $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$.

Exercice 14

Théorème 8 (*Cardinal des parties d'un ensemble*)

Si E est un ensemble à n éléments alors $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Pour la démonstration, voir l'exercice 19