

Chapitre 6: Sommes et Produits, Formules de probabilités

Savoir Faire:


- Calculer une somme.
- Manipuler une inégalité mettant en jeu une somme.
- Utiliser la formule des probabilités totales.
- Déterminer l'indépendance d'évènements.
- Calculer la puissance d'une matrice.

I - Utilisation des symboles Σ et Π .

1 Sommes et produits finis

Définition 1 (*Ensemble d'entiers*)

Soient n et p deux entiers tels que $p < n$. On note $\llbracket p; n \rrbracket = \{p; p + 1; \dots; n\}$ l'ensemble des entiers de p jusqu'à n .

 **Remarque :** Il y a n entiers dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ et $n + 1$ entiers dans $\llbracket 0; n \rrbracket$. Il y a $n - p + 1$ entiers dans $\llbracket p; n \rrbracket$.

Définition 2 (*Somme*)

Soient a_p, \dots, a_n des réels avec $p \leq n$. On note

et on lit "somme de $k = p$ à n des a_k ".


 *Écrire explicitement les sommes suivantes :*

1. $\sum_{k=0}^5 \frac{k}{k+1} =$

2. $\sum_{k=2}^6 (k+2) =$

3. $\sum_{k=1}^{10} (2k-1) =$

4. $\sum_{k=0}^n (k+1)^2 - k^2 =$

 *Écrire sous forme de somme les quantités suivantes en déterminant le terme général u_n de la somme :*

1. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 =$

3. $-1 + 4 - 9 + 16 + \dots + u_n =$

2. $1 + 4 + 9 + 16 + 25 =$

4. $1 + e + e^2 + e^3 + \dots + u_n =$

 **Remarque :** On se servira souvent de ce type de calcul :

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \sum_{k=1}^n u_k + u_{n+1}$$

Exemple 1 ()


$$\sum_{k=1}^5 k^2 = \sum_{k=1}^4 k^2 + 5^2, \quad \sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n + 1)$$

Définition 3 (Produit)

On note de la même façon,

$$\prod_{k=p}^n a_k = a_p \times \dots \times a_n$$

et on lit "produit de $k = p$ à n des a_k ".

 *Écrire explicitement les produits suivantes :*

1. $\prod_{k=0}^5 \frac{k}{k+1} =$

3. $\prod_{k=1}^4 (2k - 1) =$

2. $\prod_{k=2}^6 (k + 2) =$

Définition 4 (Factorielle)

Soit n un entier non nul. On appelle factorielle de n et on note $n!$ le nombre

Par convention, $0! = 1$

Exemple 2 (Factorielle)

$$1! = 1 \quad 2! = 1 \times 2 = 2 \quad 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$10! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 9 \times 10 = 3\,628\,800$$

Proposition 1 ()

Pour tout entier n , on a

 *Preuve directe de la propriété*

2 Propriétés des sommes et produits

Proposition 2 (Sommes)

Soient u et v deux suites réelles et $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m + 1 \leq n$, alors :

1. Relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^m u_k + \sum_{k=m+1}^n u_k$$

2. Linéarité de la somme : Pour tout λ réel

$$\sum_{k=1}^n (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=1}^n u_k + \sum_{k=1}^n v_k$$

3. Pour tout λ réel,

$$\sum_{k=1}^n \lambda = n\lambda.$$

 *Preuves des propriétés par raisonnement direct*

Proposition 3 (*Produit*)

Soient u et v deux suites réelles et $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m + 1 \leq n$, alors :

1.

$$\prod_{k=1}^n u_k = \prod_{k=1}^m u_k \times \prod_{k=m+1}^n u_k.$$

2. Pour tout λ réel

$$\prod_{k=1}^n (\lambda u_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^n u_k$$

3.

$$\prod_{k=1}^n (u_k \times v_k) = \prod_{k=1}^n u_k \times \prod_{k=1}^n v_k.$$


Rappel :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \quad \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Proposition 4 (*Exponentielle et logarithme*)

— Pour tous réels a_1, \dots, a_n , on a

— Pour tous réels $a_1 > 0, \dots, a_n > 0$, on a

 *Preuve par récurrence.*

3 Sommes usuelles

Proposition 5 (*Sommes usuelles*)

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a les formules suivantes.

II - Techniques de calculs de Somme

1 Par récurrence

Preuve par récurrence

| Si l'on connaît le résultat d'une somme, on peut montrer ce résultat par récurrence.

Exercice 1

2 En utilisant les propriétés sur les sommes

En ajoutant ou retranchant un terme

On peut parfois retrouver une somme connue en ajoutant ou retranchant des termes à la somme. C'est à dire en utilisant la formule :

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_k - u_0$$

Exercice 2

En factorisant

Quand un terme dans la somme ne dépend pas de la variable k utilisée, on peut la mettre en facteur (c'est-à-dire le sortir de la somme)

Exercice 3



En développant

On peut utiliser la formule

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$



Exercice 4

3 Changement d'indice

☞ **Remarque :** Lorsqu'on écrit $\sum_{k=p}^n a_k$, la variable k est appelée **variable muette** : on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre non utilisée :

$$\sum_{k=p}^n a_k = \sum_{j=p}^n a_j = \sum_{l=p}^n a_l$$

Proposition 6 (*Changement d'indice*)

Si a , m et p sont des entiers naturels avec $p \leq m$, on a :

$$\sum_{k=p}^m u_k = \sum_{k=p+a}^{m+a} u_{k-a}$$



Exercice 5

4 Sommes télescopiques


Définition 5 (*Sommes télescopique*)

Soit (u_k) une suite de réels. On appelle somme télescopique une somme de la forme

$$\sum_{k=p}^n u_{k+1} - u_k$$

Proposition 7 (*Sommes et produits télescopiques*)

$$\begin{aligned} - \sum_{k=p}^n (u_{k+1} - u_k) &= u_{n+1} - u_p \\ - \prod_{k=p}^n \frac{v_{k+1}}{v_k} &= \frac{v_{n+1}}{v_p}. \end{aligned}$$

 *Preuve directe de la propriété.*

 *Exercice 6*

5 Le binôme de Newton

Définition 6 (*Coefficients binomiaux*)

On appelle coefficients binomiaux, les nombres

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Théorème 1 (Formule du binôme de Newton)

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exercice 7

6 Inégalité et sommes

Proposition 8 (Inégalité)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant pour tout $k \in \llbracket p; n \rrbracket$,

$$u_k \leq v_k$$

On a alors :

$$\sum_{k=p}^n u_k \leq \sum_{k=p}^n v_k$$

Exercice 8


III - Applications aux probabilités et aux matrices

1 Union disjointe

Proposition 9 ()

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Pour toute famille d'évènements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux à deux incompatibles,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

 *Démonstration de la propriété par récurrence*

 **Remarque :** Si les $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ forment un système complet d'évènements

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(\Omega) = 1.$$

 *Exercice 9*

2 Formule des probabilités totales

Théorème 2 (Formule des probabilités totales)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soit (A_1, \dots, A_n) un système complet d'évènements de Ω de probabilité non nulle. Alors on a

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P(B) = \sum_{k=1}^n P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P_{A_k}(B)$$

Exercice 10

3 Indépendance d'une famille d'évènements

Définition 7 (Indépendance d'une famille d'évènements)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et A_1, \dots, A_n sont n évènements.

— On dit que A_1, \dots, A_n sont deux à deux indépendants si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j, P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$

— On dit que A_1, \dots, A_n sont mutuellement indépendants si :

$$\forall I \subset \llbracket 1, n \rrbracket, P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Proposition 10 ()

Soient A_1, \dots, A_n n évènements mutuellement indépendants pour la probabilité P . Si l'on pose $\forall i \in \{1, \dots, n\}, B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$ alors les évènements B_1, \dots, B_n sont mutuellement indépendants pour la probabilité P .


Exercice 11

4 binôme de Newton pour les matrices

Théorème 3 (Binôme de Newton)

Soient A, B deux matrices carrées commutatives (i.e., $AB = BA$). On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

 **Remarque :** En pratique, la matrice A ou B aura une puissance facile à calculer

 *Exercice 12*