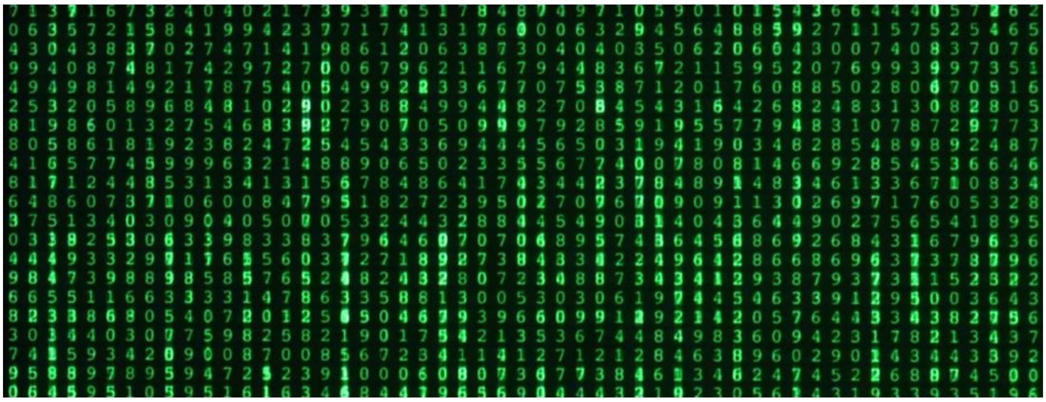
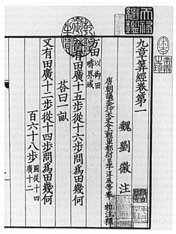
Chapitre 5: Matrices



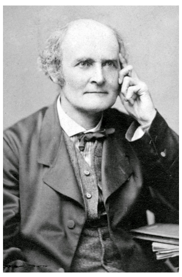
Savoir Faire:

- Additionner ou multiplier deux matrices
- Calculer la puissance d'une matrice carrée
- Inverser une matrice
- Manipuler la transposée d'une matrice

En mathématique, les matrices sont des tableaux de nombres permettant d'interpréter les résultats d'algèbre linéaire. Toutes les disciplines étudiant les phénomène linéaires utilisent les matrices. Et quand on a un problème non linéaire, on donne souvent des approximations linéaires !



Bien que le calcul matriciel moderne n'apparaisse qu'au début du XIX^e siècle, on utilise depuis longtemps des tableaux de nombres pour résoudre les systèmes d'équations. Un des premier exemple vient d'un texte chinois du II^e siècle avant JC :"Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique".



En 1545, Cardano fait connaitre cette méthode en Europe. De son côté le mathématicien japonais Seki Kôwa utilise les même techniques pour résoudre des systèmes en 1683. En 1854, Arthur Cayley publie un traité sur les transformations géométriques utilisant les matrices de façon beaucoup plus générale que tout ce qui a été fait avant lui. Il définit les opérations usuelles du calcul matriciel et montre ses propriétés.

I - Matrices quelconques

1 Définition des matrices

Définition 1 (*Matrices*)

Soient n et p sont deux entiers naturels non nuls.

Notations : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

— Le nombre réel situé à l'intersection de la $i^{ième}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne se note $a_{i,j}$. Ce sont les coefficients de la matrice A et on écrit :

Écriture de la matrice

ou $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ ou encore $A = (a_{i,j})$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.

Exemple 1 (*Matrices*)

Remarque :

Deux matrices $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant k}}$ sont égales si et seulement si elles ont le même nombre de lignes, le même nombre de colonnes et les mêmes coefficients.

Exercice 1

2 Matrices particulières

Définition 2 (*Des matrices particulières*)

—

—

—

—

Donnez des exemples de matrices particulières

3 Transposée d'une matrice

Comment faire pour passer d'un vecteur ligne à un vecteur colonne ?

Définition 3 (*Matrice transposée*)

Remarque : La transposée de A est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Exercice 2

II - Opérations sur les matrices

1 Addition

Comment additionner deux matrices ?

Définition 4 (*Addition de matrice*)

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux éléments de $\mathcal{M}_{n,\,p}(\mathbb{R})$.
On appelle **somme de** A **et** B l'élément de $\mathcal{M}_{n,\,p}(\mathbb{R})$, noté $A+B$, défini par $A+B = (c_{i,j})$ où

Remarque : La somme de deux matrices de taille différente n'est pas définie.

Remarque : L'addition matricielle est commutative ($A+B = B+A$).

Exemple 2 ()

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

2 Multiplication par un réel

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$. Que vaut $2 \times A$?

Définition 5 (*Multiplication par un réel*)

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,\,p}(\mathbb{R})$ et λ un réel. Alors $\lambda A = (c_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,\,p}(\mathbb{R})$ avec

Exemple 3 ()

$$2 \times A = 2 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} =$$

Exercice 3

3 Propriétés d'espace vectoriel

En reprenant l'exercice précédent, faites $9A + 9B$. Que remarque-t-on ?

Proposition 1 ()

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ, μ deux nombres réels.

Remarque : Les propriétés précédentes font de l'ensemble $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +, \times)$ un espace vectoriel. On verra cela dans un chapitre ultérieur.

4 Multiplication de matrices

Multiplication de 2 vecteurs

Définition 6 (*Multiplications de matrices*)

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,\,\mathbf{p}}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{\mathbf{p},\,q}(\mathbb{R})$. On définit alors $C = A \times B = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ avec

Remarque : Le produit n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Proposition 2 ()

Soient A, B et C trois matrices compatibles pour les multiplications considérées et λ un réel.

Exercice 4

III - Matrices carrées

1 Définition des matrices carrées

Définition 7 (*Matrices carrées*)

Exemple 4 (*Matrice carrée*)

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3.

Comment définir la diagonale d'une matrice carrée ?

Définition 8 (*Diagonale*)

Diagonale dans l'exemple précédent ?

2 Matrices symétriques

Qu'est ce qu'une matrice symétrique ?

Définition 9 (*Matrice symétrique*)

Remarque : Cela revient à dire que $\forall 1 \leq i, j \leq n, a_{i,j} = a_{j,i}$.

Remarque : On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées symétrique d'ordre n.

Donner des exemples de matrices symétriques

3 Matrices diagonales et triangulaires

Définition 10 (*Matrices diagonales et triangulaires*)

- Une **matrice diagonale** d'ordre n est
- Une **matrice triangulaire supérieure** (resp. **triangulaire inférieure**) est

Dessin d'une matrice diagonale et triangulaire supérieure

Ecrire des matrices diagonales et triangulaires d'ordre 3.

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.On calcule AI_3 et I_3A. Que remarque-t-on ?

Définition 11 (*Matrice identité*)

Remarque : La matrice identité I_n est neutre pour la multiplication : quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$AI_n = I_nA = A.$$

4 Puissance de matrice

Comment pourrait-on définir les puissances de matrice ?

Définition 12 (*Puissance de matrice*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée non nulle . Alors

Proposition 3 ()

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, k et l deux entiers positifs. On a :

Que peut-on dire de $(AB)^k$?

Exercice 5

Proposition 4 ()

Si A est une matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}$

Exemple 5 ()

Pour tout $m \geq 0$, $I_n^m = I_n$.

Puissance de matrice (1ère méthode)

Si l'on a une matrice A et que l'on connait la formule pour A^n, on peut montrer le résultat par récurrence.

Exercice 6 et Exercice 7

IV - Matrices inversibles

1 Définition

Quel est l'inverse d'un nombre réel ?

Définition 13 (*Matrices inversibles*)

Remarque : La matrice I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

Exemple 6 (*Matrice inversible*)

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 8

2 Propriétés

Proposition 5 ()

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration directe de la dernière propriété.

Proposition 6 ()

Démonstration par l'absurde de la dernière propriété.

3 Règles de calculs

Proposition 7 ()

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C \in GL_n(\mathbb{R})$.

Remarque : Cela n'est valable que si C est inversible

Proposition 8 ()

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$ alors A est inversible, d'inverse B.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_n$ alors A est inversible, d'inverse B.

Montrer qu'une matrice est inversible.
Pour montrer qu'une matrice A est inversible, on peut chercher une matrice B telle que $AB = I_n$. On pourra conclure que A est inversible, et que $A^{-1} = B$ (Exercice 9)

4 Cas particulier des matrices 2×2

Proposition 9 (*Cas particulier des matrices* $\mathbf{2 \times 2}$)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. A est inversible si et seulement si

Remarque : Le nombre $ad - bc$ est appelé déterminant de A.

Démonstration directe de la propriété et Exercice 10

Puissance de matrice (2ème méthode)

Soit A une matrice carrée. Si on parvient à écrire $A = PDP^{-1}$ où P est une matrice inversible et D est une matrice diagonale. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$$

Démonstration par récurrence de la formule puis Exercice 11.