

## Chapitre 4: Probabilités finies

### **Savoir Faire:**

- Exprimer des évènements en fonction d'intersection, d'union et du complémentaire.
- Déterminer la probabilité d'une union finie.
- Déterminer une probabilité conditionnelle.
- Déterminer la probabilité d'une intersection finie.
- Utiliser la formule des probabilités totales.



**Pierre de Fermat**  
(1601 - 1665)

**Blaise Pascal**  
(1623-1662)

À l'origine, le terme probabilité vient du latin *probabilitas* qui désigne l'opposé du concept de certitude. Dans les traductions d'Aristote, le terme probabilité ne désigne pas une quantification mais une idée communément admise. L'apparition de la notion de "risque" n'est apparue qu'au  $XII^e$  siècle pour l'évaluation de contrats commerciaux et elle s'est développée au  $XVI^e$  siècle avec les contrats d'assurance maritime.

Le véritable début de la théorie des probabilités en mathématiques a lieu au  $XVII^e$  et  $XVIII^e$  siècle grâce aux travaux de Pascal, Fermat, Newton, Bernoulli, Cramer... Le calcul des probabilités reste alors une discipline en marge des mathématiques. Ce n'est qu'au  $XX^e$  siècle avec Kolmogorov (1903 - 1987) que commence la théorie des probabilités comme branche des mathématiques.

# I - Vocabulaire

## 1 Expérience aléatoire

### Définition 1 (*Expérience aléatoire*)

Une expérience aléatoire est une expérience où l'on connaît les résultats possibles (ou issues) mais on ne sait pas à l'avance lequel va arriver.

### Définition 2 (*Univers*)

L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé univers de cette expérience et est souvent noté  $\Omega$ .

### Exemple 1 (*Dé à 6 faces*)

On lance un dé à 6 faces et on note le numéro de la face supérieur. C'est une expérience aléatoire qui a pour univers

### Exemples d'expérience aléatoire et d'univers classique

Expériences aléatoires	Univers
On lance 1 pièce	
On lance deux pièces de monnaies successivement	
On lance deux dés à 6 faces simultanément	
On tire une carte d'un jeu de 52 cartes et on regarde la couleur	
On tire successivement 2 boules d'une urne avec 4 boules noires et 2 boules blanches	
On étudie la durée de vie d'une télévision choisie au hasard dans une usine	

## 2 Événements

### Définition 3 (*Évènements*)

Soit une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$


### Exemple 2 (*Dé à 6 faces*)

- "Obtenir un nombre pair" est l'évènement
- "Obtenir 2" est un évènement
- "Obtenir un nombre  $\geq 7$ " est un évènement
- "Obtenir un diviseur de 60" est un évènement

## 3 Opérations sur les évènements

### Définition 4 (*Opérations d'évènements*)

Soit une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$ . A et B sont deux évènements

 **Remarque :** Les notations sont les mêmes que pour la théorie des ensembles.

 *Exercice 1*

### Définition 5 (*Évènements incompatibles*)

Soit une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$ .

On note alors  $A \cap B = \emptyset$ .

☞ **Remarque** : Si  $A$  est un évènement, alors  $A$  et  $\bar{A}$  sont toujours incompatibles.

☞ **Remarque** : Deux évènements élémentaires différents sont toujours incompatibles.

### Exemple 3 (*Dé à 6 faces*)

$A = \{\text{obtenir un chiffre pair}\}$  et  $\bar{A} = \{\text{obtenir un chiffre impair}\}$  sont incompatibles.

☛ *On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. Dites lesquels de ces évènements sont incompatibles entre eux.  $A = \text{"On tire un trèfle"}$ .  $B = \text{"On tire une figure"}$ .  $C = \text{"On tire un carreau"}$ .  $D = \text{"On tire un nombre entre 2 et 8"}$ .*

### Définition 6 (*Système complet d'évènements*)


Soit une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$  fini. On appelle **système complet d'évènements** une partition  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $\Omega$  :

☞ **Remarque** : Pour tout évènement  $A$  de  $\Omega$ , la famille d'évènements  $(A, \bar{A})$  est un système complet d'évènements de  $\Omega$ .

☛ *Proposer des systèmes complets d'évènements de l'univers  $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket$ .*

## II - Espaces probabilisés finis

### 1 Loi de probabilité

 Un même univers peut correspondre à deux expériences aléatoires différentes. Par exemple, lancer un dé équilibré et lancer un dé truqué correspondent à l'univers  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Ce qui les différencie, ce sont les probabilités des différents événements (ou la loi de probabilité) que l'on définit pour chaque expérience.


#### Définition 7 (*Probabilité*)

Soit  $\Omega$  un ensemble fini. On appelle **probabilité** sur  $\Omega$  toute application

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0; 1]$$

telle que :

Le triplet  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  est un espace de probabilité.

 **Remarque :** Pour tout événement  $A$ , le réel  $P(A)$  est appelé probabilité de l'évènement  $A$ .

#### Proposition 1 ()

Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace de probabilité et soient  $A$  et  $B$  deux événements. Alors, on a :

 *Démonstration de la propriété*

#### Proposition 2 (*Crible de Poincaré*)

Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé fini et  $A, B, C$  trois événements quelconque


- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$ .

 *Exercice 2*

### Proposition 3 ()

Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé fini. Pour toute famille d'évènements  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  deux à deux incompatibles,

$$P(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$$

 *Démonstration de la propriété par récurrence*

 **Remarque :** Si les  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  forment un système complet d'évènements

$$P(A_1) + \dots + P(A_n) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(\Omega) = 1.$$

 *Exercice 3*

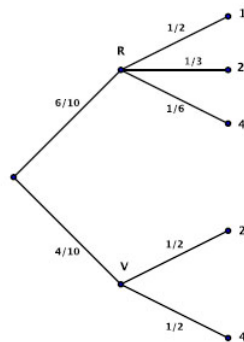
### III - Probabilités conditionnelle

#### 1 Arbre pondéré

##### Exemple 4 (*Expérience*)

Dans un sac, on possède 10 jetons : 6 jetons rouges, numérotés 1,1,1,2,2,4 et quatre jetons verts, numérotés 2,2,4, 4. On tire au hasard un jeton du sac. On note R l'événement "obtenir un jeton rouge", V l'événement "obtenir un jeton vert", 1 l'événement "obtenir un jeton 1" ... .

On représente cette situation par un arbre pondéré.



Par exemple, la branche -R-2 signifie que l'on a obtenu un jeton rouge numéroté 2.

##### Proposition 4 (*Arbre pondéré*)

- Loi des nœuds : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de l'événement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

Ainsi la probabilité de  $R \cap 2$  est égale à


$$P(R \cap 2) = \frac{6}{10} \times \frac{1}{3} = P(R) \times P_R(2)$$

##### Exercice 4

## 2 Probabilité conditionnelle

### Définition 8 (*Probabilités conditionnelles*)

Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé fini et soit  $A$  un évènement de probabilité **non nulle**.

 **Remarque : Importante** La probabilité conditionnelle étant une probabilité, toutes les propriétés vraies pour une probabilité restent vraies pour la probabilité conditionnelle.

### Exemple 5 (*Probabilité conditionnelle*)

Dans l'exemple précédent,  $P_V(2) = \frac{1}{2}$ .

 *Exercice 5*

### 3 Formule des probabilités composées

#### Théorème 1 (Formule des probabilités composées.)

On utilise souvent les probabilités conditionnelles pour déterminer la probabilité de l'intersection :

🌀 **Remarque :** Cette formule est très importante. On l'utilisera souvent pour déterminer la probabilité d'une intersection.

#### Exemple 6 (Probabilité composées)


Dans l'exemple précédent,  $P(R \cap 4) = P(R) \times P_R(4) = \frac{6}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$ .

 *Exercice 6.*

### 4 Formule des probabilités totales

#### Proposition 5 (Arbre et probabilités totale)

Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.

 *Quelle est la probabilité de tirer un jeton avec le numéro 2 ?*

### Théorème 2 (*Formule des probabilités totales*)

Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé fini.

#### *Exercice 7(a,b,c)*

## 5 Formule de Bayes

### Théorème 3 (*Formule de Bayes*)

Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé fini.

### Exemple 7 (*Formule de Bayes*)

Dans l'exemple du début, la probabilité, sachant qu'on a eu un jeton 2, que celui-ci soit vert, vaut

$$P_2(V) = \frac{P(V)}{P(2)} P_V(2) = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{4}{10}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

## IV - Indépendance de 2 évènements

### Définition 9 (Indépendance)

Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé fini.

### Proposition 6 (Indépendance et probabilité conditionnelle)

Soient  $A, B$  deux évènements de probabilité non nuls.

### Proposition 7 ()

Si  $A$  et  $B$  sont indépendants alors  $\bar{A}$  et  $B$  sont également indépendants.

## V - Bilan sur les probabilités

### Exercice sur les probabilités.

Au début d'un exercice sur les probabilités, il faut traduire les hypothèses en évènements (modélisation). Ensuite :

1. **Si on calcule une probabilité simple ( $P(B)$ ) :**
  - Si on a un système complet d'évènements, on peut utiliser le fait que la somme des probabilités fasse 1.
  - S'il s'agit de probabilités conditionnelles, si on a un système complet d'évènements, on utilise la formule des probabilités totales.
  - S'il y a équiprobabilité, on utilise les techniques de dénombrement (cf chap. 7)
  - S'il s'agit de variables aléatoires connues, on utilise la formule (cf Chap. 9)
2. **Si on calcule la probabilité d'une union ( $P(A \cup B)$ )**
  - Si les évènements sont **incompatibles**, on fait la **somme** des probabilités
  - Sinon, on utilise  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  ou le crible de Poincaré.
3. **Si on calcule la probabilité d'une intersection ( $P(A \cap B)$ )**
  - Si les évènements sont **indépendants**, on fait le **produit** des probabilités.
  - S'il s'agit de probabilités conditionnelles, on utilise  $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$  ou la formule des probabilités composées.
4. **Si on calcule une probabilité conditionnelle ( $P_A(B)$ )**
  - On regarde avant tout si la probabilité n'est pas une hypothèse de l'exercice.
  - Si on connaît  $P(A \cap B)$  et  $P(A)$ , on utilise la définition.
  - Si on connaît  $P_B(A)$ , on utilise la formule de Bayes.
5. **Si on calcule la probabilité de l'évènement contraire  $P(\bar{A})$  :**
  - Dans ce cas, on utilise  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .
6. **Pour montrer que 2 évènements sont indépendants :**
  - Regarder si c'est une hypothèse de l'énoncé.
  - Si c'est une expérience **identique** que l'on répète, les évènements sont indépendants.
  - Sinon, calculer  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(A \cap B)$  et vérifier que  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .