Chapitre 3:
Généralités sur les suites et suites usuelles.

Savoir Faire:

— Démontrer par récurrence
— Déterminer la monotonie d'une suite
— Montrer qu'une suite est minorée ou majorée
— Déterminer la formulation explicite des suites classiques.

En économie, on a souvent besoin d'étudier des suites de données numériques, en particulier quand on suit l'évolution des valeurs d'une variable économique au cours du temps. On peut étudier par exemple la suite formée des valeurs successives :

— du PIB chaque année ;
— du taux de chômage chaque mois ;
— du taux d'inflation chaque année.

Il est donc utile pour l'économiste de savoir analyser des suites de nombres et répondre à des questions comme :

— les valeurs sont-elles de plus en plus élevées ?
— les valeurs de cette suite varient-elles de moins en moins avec le temps, pour se rapprocher d'un nombre donné ?

Exemple 1 (***Évolution de l'épargne***)

J'ai initialement 2000 € d'économies et j'ajoute 100 € par mois à mon épargne. Quelles sont les premiers termes de la suite décrivant l'évolution de mon épargne ? Quelle formule donne le total de l'épargne au n^e mois ?

I - Définition et principe de récurrence.

1 Définition et notation

Définition 1 (*Suite numérique réelle.*)

Une suite u définie par
$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto u_n$$

se note plus simplement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n). L'élément u_n est appelé terme de rang n de la suite u.

Exemple 2 (*Définition des suites*)

Dans l'exercice précédent, on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite décrivant l'épargne au cours du mois. On a alors

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2000 + 100n.$

2 Trois types de définition

1. **Définition explicite -** $u_n = f(n)$.
   La suite peut être définie explicitement (souvent à l'aide d'une formule) :
   — u est définie par $u_n = 2000 + 100n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   — v est la suite définie par v_n est la $n^{\text{ème}}$ décimale de π, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. **Définition par récurrence -** $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Elle peut également être définie par récurrence, c'est à dire en fonction des anciennes valeurs de la suite.
   — Dans les exemples précédents, u est la suite définie par $u_0 = 2000$ et par $u_{n+1} = u_n + 100$.
   — $\begin{cases} v_0 = 2, \quad v_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \end{cases}$
3. **Définition implicite**.
   Une suite peut également être définie par une equation. Par exemple, soit (u_n) la suite définie pour tout $n > 3$ par : "u_n est l'unique solution de l'équation $\ln(x) = nx$.

3 Principe de récurrence

Le principe de récurrence est un raisonnement des mathématiques permettant de montrer des propositions dépendant d'un entier.

Définition 2 (*Principe de récurrence*)

Récurrence.

1. Énnoncer clairement la propriété que l'on veut montrer.
2. Initialisation : Vérifier que la propriété est vraie au rang n_0 (en général, c'est facile).
3. Hérédité : On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geq n_0$ et on montre que la propriété est vraie au rang $n + 1$.
4. Conclusion : On réécrit clairement ce qu'on a démontré.

Exercice 1

II - Comportement des suites

1 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 3 (*Suites majorées, minorées, bornées*)

Exemple 3 ()

La suite u définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ est bornée car $\forall n,\ 0 \leq u_n \leq 1$.

Dans le cas d'une suite définie par récurrence, on peut également montrer qu'elle est bornée par récurrence.

Exercice 2

2 Suites monotones

Définition 4 (*Suites monotones*)

Soit (u_n) une suite.

- On dit que (u_n) est constante si $u_n = u_{n+1}$ pour tout n.
- On dit que (u_n) est une suite croissante (resp strictement croissante) si $u_n \leq u_{n+1}$ (resp $u_n < u_{n+1}$) pour tout n.
- On dit que (u_n) est une suite décroissante (resp strictement décroissante) si $u_n \geq u_{n+1}$ (resp $u_n > u_{n+1}$) pour tout n.
- Une suite monotone est une suite soit croissante, soit décroissante.

Remarque : Une suite peut n'être monotone qu'à partir d'un certain rang n_0. Une suite constante à partir d'un certain rang est dite stationnaire.

Exemples de suites monotones.

3 Méthodes de recherche des variations d'une suite.

Suites définies explicitement

Pour étudier la monotonie d'une suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq n_0$ par $u_n = f(n)$, on introduit la fonction f associée, et on étudie ses variations. On en déduit alors la monotonie de u.

— Si f est croissante sur $[n_0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante.

— Si f est décroissante sur $[n_0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 3

Méthode des soustractions

Soit une suite u donnée. On peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

— Si $\forall n,\ u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite u est croissante.

— Si $\forall n,\ u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite u est décroissante.

Exercice 4

Méthode des divisions

Soit une suite u dont **tous les termes sont strictement positifs**. On a alors

— Si $\forall n,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite u est croissante.

— Si $\forall n,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite u est décroissante.

Exercice 5

Exemple 4 (*Suites géométriques*)

— Si $a > 1$, la suite (a^n) est strictement croissante.

— Si $a = 1$, la suite (a^n) est constante.

— Si $0 < a < 1$, la suite (a^n) est strictement décroissante.

Méthode par récurrence

Dans le cas d'une suite définie par récurrence, on peut étudier sa monotonie par récurrence, en prenant comme hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_n$: "$u_{n+1} \geq u_n$" pour montrer que la suite est croissante, ou $\mathcal{P}_n$: "$u_{n+1} \leq u_n$" pour montrer qu'elle est décroissante

Exercice 6

III - Suites particulières

1 Suites arithmétiques

Définition 5 (*Suites arithmétiques*)

Exemple 5 (*Retour à l'exemple du début*)

Dans l'exemple du début, l'évolution de l'épargne est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2000$ et de raison 100.

Proposition 1 (*Formule explicite*)

Soit u une suite arithmétique de raison r, alors :

Si la suite u n'est définie qu'à partir d'un rang $p \in \mathbb{N}$, alors :

Preuve de la propriété par récurrence

Corollaire 1 (*Somme des n premiers entiers*)

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

Démonstration directe de la propriété

Proposition 2 (*Sens de variation d'une suite arithmétique*)

Soit u une suite arithmétique de raison r :

— si $r > 0$ alors la suite u est strictement croissante
— si $r < 0$ alors la suite u est strictement décroissante
— si $r = 0$ alors la suite u est constante.

Preuve de la propriété par disjonction de cas

2 Suites géométriques

Définition 6 (*Suites géométriques*)

Proposition 3 (*Formule explicite*)

Soit u une suite géométrique de raison q, alors :

Si la suite u n'est définie qu'à partir d'un rang $p \in \mathbb{N}$, alors :

Preuve de la propriété par récurrence

Proposition 4 (*Somme des n premiers termes d'une suite géométrique*)

Soit $q \neq 1$ et $0 \leq p \leq n$,on a alors

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ et } q^p + \ldots + q^n = q^p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Exercice 7

Proposition 5 (*Sens de variation d'une suite géométrique*)

Soit u une suite géométrique de raison q et de terme initial $u_0 > 0$:

- si $0 < q < 1$ alors la suite u est strictement décroissante
- si $q = 1$ alors la suite u est constante ou stationnaire
- si $q > 1$ alors la suite u est strictement croissante
- si $q < 0$ alors la suite u n'est ni croissante ni décroissante(ses termes sont alternativement positifs et négatifs).

Exemple 6 (*Suite non monotone*)

La suite $(-1)^n$ n'est pas monotone.

3 Suites arithmético-géométrique

Ces suites s'appellent aussi suites récurrentes linéaire d'ordre 1.

Définition 7 (*Suites arithmético-géométrique*)

Une suite u est une suite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et $b \in \mathbb{R}^\star$, tels que :

Remarque : Une suite arithmético-géométrique est définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction affine de la forme $f(x) = ax + b$

Proposition 6 (*Formule explicite*)

Soit u une suite arithmético-géométrique. Avec les notations de la définition, soit α le réel solution de l'équation $x = ax + b$. Alors la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique de raison a.

Suite arithmético-géométrique

Pour trouver la formule explicite d'une suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$.

1. On résout l'équation $x = ax + b$ d'inconnue x. On trouve une solution α.
2. On pose une suite annexe $v_n = u_n - \alpha$. Cette suite est géométrique
3. On détermine v_0 et on cherche la raison de v_n en écrivant $v_{n+1} = ...$
4. On écrit la formule explicite pour v_n.
5. On écrit la formule explicite pour $u_n = v_n + \alpha$.

Exercice 8

4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 8 (*Suites récurrentes linéaires d'ordre 2*)

Une suite u est une suite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe deux réels $a \in \mathbb{R}^\star$ et $b \in \mathbb{R}^\star$, tels que :

Remarque : On a besoin pour définir ce type de suite de ses deux premiers termes u_0 et u_1.

Proposition 7 ()

Soit u une suite récurrente d'ordre 2, vérifiant pour tout n, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Alors la suite géométrique (q^n) $(q \neq 0)$ est solution de la récurrence si et seulement si $q^2 = aq + b$.

Démonstration de la propriété par double implication

Proposition 8 (*Formule explicite*)

Soit u une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On pose l'équation (E) : $x^2 - ax - b = 0$ appelée **équation caractéristique de** u.

— si l'équation (E) admet deux solutions réelles x_1 et x_2, alors il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \times x_1^n + \mu \times x_2^n$$

— si l'équation (E) admet une solution réelle x_0, alors il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu \times n)x_0^n$$

Déterminer l'expression d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Pour déterminer l'expression d'une suite définie par $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$,

1. On résout l'équation caractéristique (E) : $x^2 = ax + b$.
2. Si l'équation a 2 solutions q_1, q_2, on a $u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$.
3. Si l'équation n'a qu'une solution q_0, on a $u_n = (\lambda + \mu \times n)q_0^n$.
4. En utilisant les valeurs de u_0 et u_1, on pose un système de deux équations à deux inconnues.
5. On résout le système pour trouver les valeurs de λ et de μ.

Exercice 9