Chapitre 24: Variables aléatoire à densité

Exercice 1(a,b,c)

I - Variables aléatoires à densité.

1 Notion de densité

L'objectif de ce chapitre est de s'intéresser aux variable aléatoires dont le support est un intervalle, et non plus fini ou dénombrable.

Dans tout le chapitre, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire dont le support $X(\Omega)$ est un intervalle ou une union d'intervalles.

Rappelez ce qu'est une fonction de répartition dans le cas discret.

Définition 1 (*Fonction de répartition*)

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Exercice 1 (d)

Montrer qu'une variable aléatoire est à densité.

Pour démontrer qu'une variable aléatoire est à densité, il suffit de montrer :

1. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. De limite 0 en $-\infty$ et de limite 1 en $+\infty$.
3. Continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.

Remarque : F_X étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de point, on peut définir une fonction continue F'_X sauf éventuellement en un nombre fini de point.

Exercice 2(a)

Définition 2 (*Densité de probabilité*)

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et F_X sa fonction de répartition.

Remarque : Une fonction de densité n'est pas unique et la valeur prise par la densité aux points où F_x n'est pas $\mathcal{C}^1$ n'a aucune importance.

Théorème 1 (*Non unicité de la densité*)

Soit f une fonction, à valeurs positives, qui ne diffère de F'_X qu'en un nombre fini de points. Alors f est également une densité de X.

Exercice 2 (b)

2 Propriétés

Proposition 1 (*Densité*)

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, F_X sa fonction de répartition et f_X une densité de X.

Comment calculer $P(X \leq x)$ ou $P(X > x)$?

Théorème 2 ()

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, F_X sa fonction de répartition et f_X une densité de X.

Remarque : Puisque la fonction de répartition définit la loi de X, d'après ce qui précède, la connaissance d'une densité f_X permet de connaitre complètement F_X, et donc la loi de X.

Que vaut $P(X = x)$? $P(a \leq X < b)$?

Proposition 2 ()

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, F_X sa fonction de répartition et f_X une densité de X.

Exercice 3

.

3 Reconnaitre une densité

Théorème 3 (*Densité*)

Reconnaitre une densité

Pour démontrer qu'une fonction est une densité, il faut donc montrer trois points :

- f est positive sur $\mathbb{R}$.
- f est continue sur $\mathbb{R}$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points).
- et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

Exercice 4

4 Transformation affine

Soit Y une variable aléatoire discrète ayant pour loi, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = (1-a)^{n-2}a$. Déterminer la loi de $Z = X + 1$, puis l'espérance et la variance de X.

Théorème 4 (*Transformation affine*)

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de fonction de répartition F_X et de densité f_X. Soient a et b deux réels tels que a $a \neq 0$. Alors $Y = aX + b$ est également une variable à densité, dont une densité est

$$f_Y : x \to \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Remarque : Il est inutile d'apprendre ce résultat. En effet, il est souvent plus simple de le retrouver, en partant de $F_Y(x) = P(Y \leq x)$ et en revenant à X.

Démonstration du théorème et Exercice 5.

II - Espérance d'une variable aléatoire à densité

1 Définition

Comment calcule-t-on l'espérance dans le cas discret ?

Définition 3 (*Espérance*)

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f_X.

Remarque :

Exercice 6

VA admettant une espérance

Pour montrer qu'une variable aléatoire à densité admet une espérance, on procède en deux temps :

1. On montre que l'intégrale est absolument convergente : Pour cela, on calcule $\int_a^0 tf_X(t)dt$ et $\int_0^b tf_X(t)dt$ et on montre que ces intégrales admettent une limite lorsque a tend vers $-\infty$ et b tend vers $+\infty$.
2. On conclut alors que X admet une espérance qui vaut alors $\int_{-\infty}^0 tf_X(t)dt + \int_0^{+\infty} tf_X(t)dt$, valeurs qu'on aura calculées précédemment.

Exercice 7

2 Propriétés.

Rappeler la propriété de linéarité de l'espérance.

Proposition 3 (*Linéarité de l'espérance*)

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **admettant une espérance** et soit a un réel non nul et b un réel quelconque. Alors la variable aléatoire $aX + b$ admet également une espérance et on a

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Exercice 8

3 Variable aléatoire centrée

Définition 4 (*Variable aléatoire centrée*)

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **admettant une espérance**.

- On dit que X est une variable aléatoire centrée si $E(X) = 0$.
- Si X n'est pas centrée, la variable aléatoire $Y = X - E(X)$ est une variable aléatoire à densité centrée.

III - Lois usuelles à densité

1 La loi uniforme

Définition 5 (*Loi uniforme*)

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ et on note $X \hookrightarrow U([a;b])$, si X est une variable aléatoire à densité, de densité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

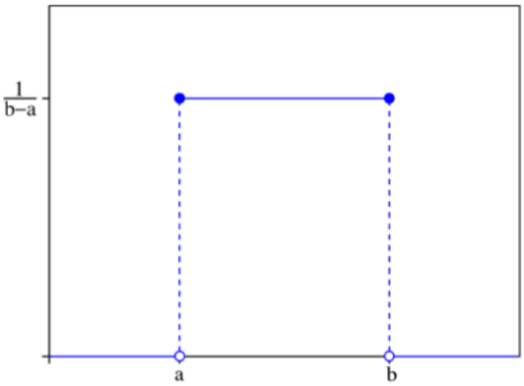
Remarque : La loi uniforme sur $[a;b]$ est la même que sur $[a;b[$, $]a;b]$ ou $]a;b[$.

Exercice 9

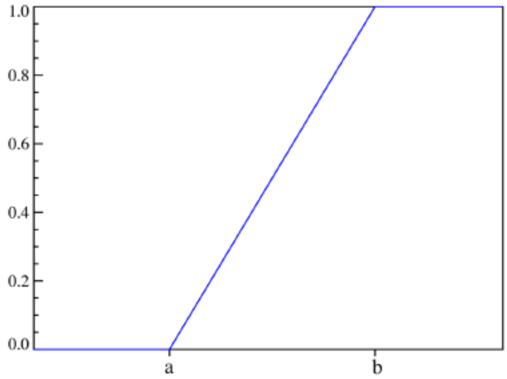
Théorème 5 (*Fonction de répartition de la loi uniforme*)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a;b]$. La fonction de répartition de X est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si} x > b \end{cases}$$



Densité de probabilité



Fonction de répartition

Exercice 10

Quelle est l'espérance d'une variable uniforme dans le cas discret ?

Théorème 6 (*Espérance de la loi uniforme*)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a;b]$. X admet une espérance et

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Exercice 11

2 Loi exponentielle

Définition 6 (*Loi exponentielle*)

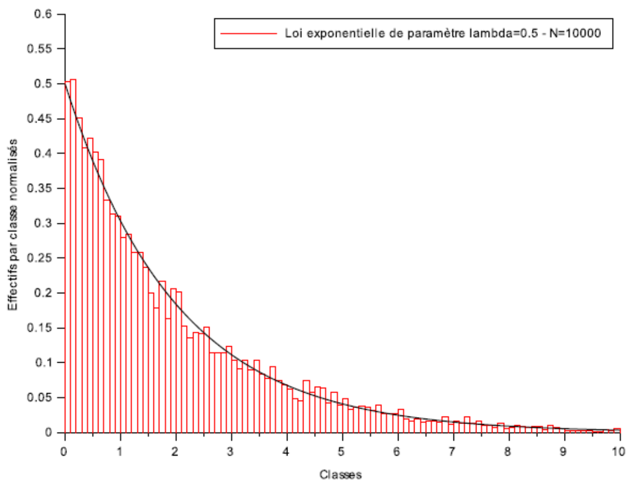
Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $\lambda > 0$. On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre λ et on note $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, si X est une variable aléatoire à densité, de densité

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : La loi exponentielle est à support sur $\mathbb{R}_+$ mais peut également être définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 12

Simulation de la loi exponentielle



Théorème 7 (*Fonction de répartition de la loi exponentielle*)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. La fonction de répartition de X est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} x \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 13

Quelle est l'espérance d'une variable aléatoire géométrique ?

Théorème 8 (*Espérance de la loi uniforme*)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. X admet une espérance et

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Exercice 14

.

Définition 7 (*Loi sans mémoire*)

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives, et telle que pour tout $a \geq 0, P(X > a) > 0$. On dit que la loi de X est sans mémoire si

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad P_{(X>a)}(X > a + b) = P(X > b)$$

Remarque : Par définition des probabilités conditionnelles, la loi de X est sans mémoire ssi

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad P(X > a + b) = P(X > a)P(X > b)$$

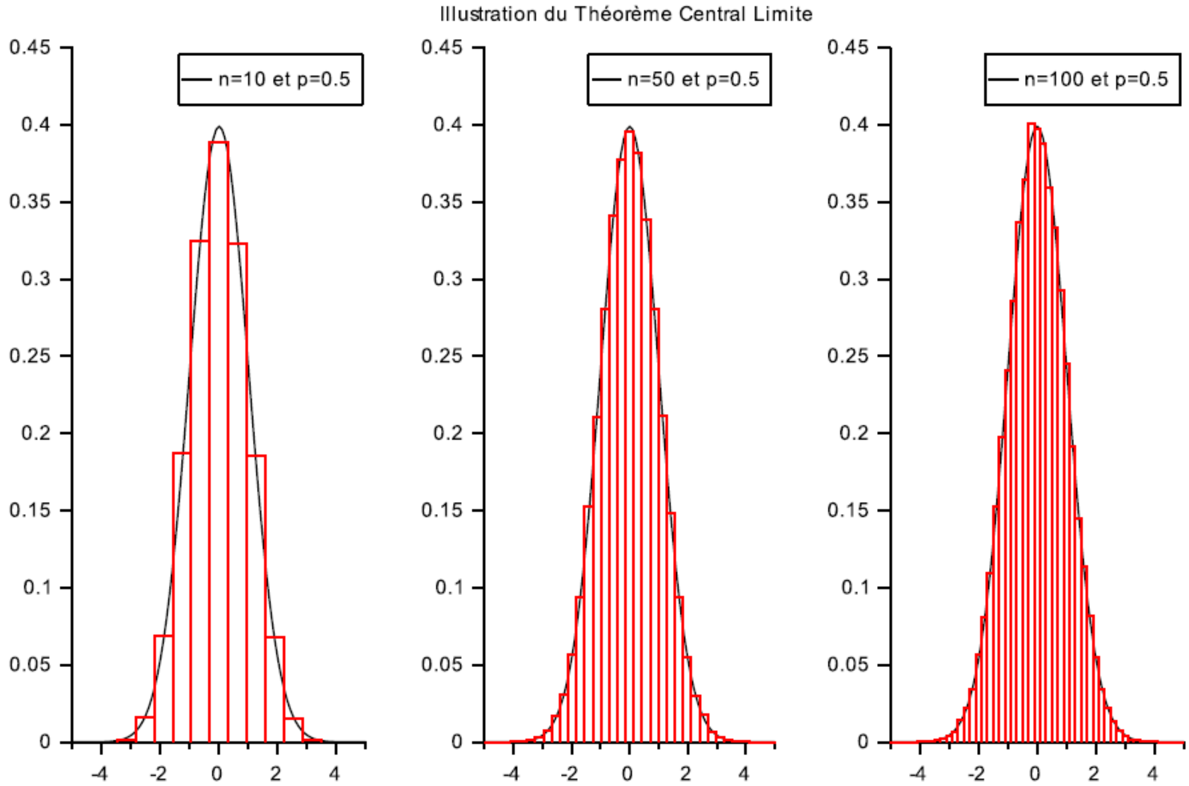
Théorème 9 (*La loi exponentielle est sans mémoire*)

Soit X une variable à densité, à valeurs positives, et telle que $\forall a > 0, P(X > a) > 0$. Alors X est une variable sans mémoire si et seulement si X suit une loi exponentielle.

Montrer que la loi géométrique et la loi exponentielle sont des lois sans mémoires.

3 Loi normale

Dans cette partie, on se fixe un réel $p \in]0;1[$ et on considère Z_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre p et n que l'on centre et réduit.

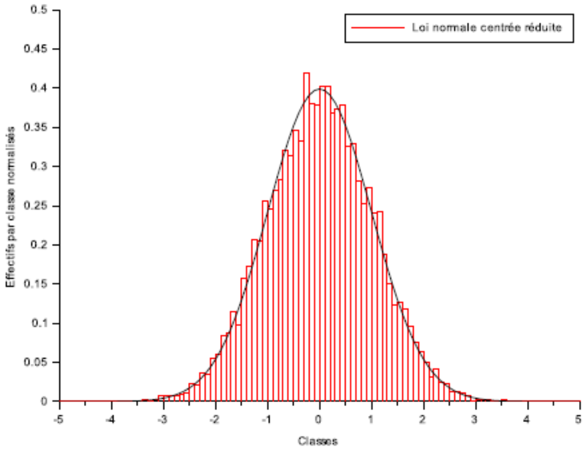


Définition 8 (*Densité de la loi normale centrée réduite*)

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que X suit une loi normale centrée réduite et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, si X est une variable aléatoire à densité, de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Exercice 15



Théorème 10 (*Fonction de répartition*)

Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi normale centrée réduite.

— Sa fonction de répartition est notée Φ :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

— Pour tout réel x, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, et $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$

— Pour tout réel x, $P(-x \leq X \leq x) = 2\Phi(x) - 1$.

— X admet une espérance et $E(X) = 0$.

Remarque : Vous verrez l'année prochaine que X admet une variance, qui vaut 1. D'où la notation $\mathscr{N}(0, 1)$.

Exercice 16

Définition 9 (*Densité de la loi normale*)

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que X suit la loi normale de paramètre (μ,σ^2), et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si X est une variable aléatoire à densité, de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Exercice 17

Théorème 11 (*Espérance*)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres (μ, σ^2). Alors X admet une espérance, et $E(X) = \mu$.

Remarque : Vous verrez que X admet une variance, qui vaut σ^2. Ainsi σ représente l'écart-type de la loi normale.

Exercice 18

Proposition 4 (*Transformation affine*)

Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Alors

$$X \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu, \sigma^2) \iff X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathscr{N}(0, 1)$$

Exercice 19