

Chapitre 23: Applications linéaires

 *Rappeler des propriétés de linéarités*

I - Applications linéaires.

Définition 1 (*Applications linéaires*)

Soient E et F deux espaces vectoriels. Une application de E dans F est dite linéaire si et seulement si

1. $\forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

 **Remarque :** L'ensemble des applications linéaires de E dans F est notée $\mathcal{L}(E, F)$



Montrer qu'une application est linéaire.

Pour montrer qu'une application est linéaire, on prendra x et y dans l'ensemble E , λ un réel et on montre

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$



Exercice 1

Proposition 1 (*Propriétés des applications linéaires*)

Si f est une application linéaire de E dans F :

1. $f(0_E) = 0_F$
2. $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$
3. $f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$.

Définition 2 (*Endomorphisme*)

Dans le cas où E et F sont le même espace vectoriel, une application linéaire est appelé endomorphisme. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

 *Exercice 2*

Théorème 1 (*Lien avec les matrices*)

Toute application linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est de la forme

$$f : x \rightarrow MX,$$

où M est une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

 **Remarque :** Toute application linéaire est liée à une matrice

Déterminer la matrice associée à une application linéaire

Pour déterminer la matrice d'une application linéaire f de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$:

1. Il faut considérer (e_1, \dots, e_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. Calculer $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$.
3. Écrire les résultats obtenus en colonne.


Exercice 3

II - Noyau d'une application linéaire

Définition 3 (Noyau d'une application linéaire)

Soit f une application linéaire de E dans F . On appelle noyau de f noté $\text{Ker}(f)$ le sous-ensemble de E défini par :

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E, f(x) = 0_F\}$$

 **Remarque :** Pour déterminer le noyau de f , on est conduit à la résolution d'un système linéaire.

Déterminer le noyau

Pour déterminer le noyau d'une application linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ de matrice \mathcal{M} dans les bases canoniques, on résout le système $MX = 0$.

Exercice 4

Proposition 2 ()

Soit f une application linéaire de E dans F . $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel

Pour montrer qu'un ensemble E est un sous-espace vectoriel on pourra montrer que E est le noyau d'une application linéaire adéquate.

Exercice 5

III - Image d'une application linéaire

Définition 4 (*Image d'une application linéaire*)

Soit f une application linéaire de E dans F . On appelle image de f , noté $Im(f)$ le sous-ensemble de F défini par :

$$Im(f) = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

C'est l'ensemble des images des éléments de E .

Image d'une application linéaire

Pour déterminer l'image d'une application linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ de matrice M dans les bases canoniques on détermine les valeurs de Y pour lesquelles $MX = Y$ a au moins une solution.

Proposition 3 ()

Soit f une application linéaire de E dans F . On note $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de E . $Im(f)$ est le sous-espace vectoriel de F engendré par la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$, c'est à dire :

$$Im(f) = Vect(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Déterminer l'image d'une application linéaire

Pour déterminer l'image d'une application linéaire :

1. On considère (e_1, \dots, e_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. On calcule $u_1 = f(e_1), u_2 = f(e_2), \dots, u_n = f(e_n)$.
3. On regarde si la famille (u_1, \dots, u_n) est libre.

Exercice 6.