Chapitre 22: Intégrales impropres

Savoir Faire:

- Étudier la nature et calculer la valeur d'une intégrale généralisée.
- Étudier la nature et calculer la valeur d'une double intégrale généralisée.
- Étudier la nature d'une intégrale généralisée par comparaison.

Exercice 1

I - Intégrale sur un intervalle quelconque.

Définition 1 (*Intégrale impropre*)

Calcul d'intégrale impropre

1. On pose x afin de calculer l'intégrale sur un segment.
2. On fait tendre x vers l'infini.

Exercice 2

Définition 2 (*Intégrale impropre*)

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ (avec a et b pouvant valoir $-\infty$ ou $+\infty$) et $c \in]a, b[$.
On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente ssi

Remarque : Dans les deux cas, ces intégrales sont appelés impropres car une intégrale n'est définie rigoureusement que sur un segment.

Exercice 3

II - Intégrales de références

Tout comme les sommes, certaines intégrales sont tellement importantes qu'on les appelle intégrales de références. Elles sont à connaitre par cœur.

Rappeler ce qu'est une série de Riemann ?

Proposition 1 (*Intégrale de Riemann (1)*)

Exercice 4

Proposition 2 (*Intégrale de Riemann (2)*)

Exercice 5

Proposition 3 (*Exponentielle*)

Exercice 6

Proposition 4 (*Logarithme*)

Exercice 7

Proposition 5 (*Gaussienne*)

Exercice 8

III - Propriétés des intégrales impropres

1 Linéarité de l'intégrale

Remarque : Toutes les propriétés vues sur les intégrales sont encore vraies à condition que les intégrales impropres soient convergentes.

Proposition 6 (*Linéarité de l'intégrale*)

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, λ et μ deux réels.

Exercice 9

2 Relation de Chasles

Rappeler la relation de Chasles pour les intégrales.

Proposition 7 (*Relation de Chasles*)

Soient $a < b$ (finis ou non) et f une fonction continue sur $]a, b[$ telle que $\int_a^b f(t)dt$ converge. Alors, pour tout $c \in]a, b[$, on a

3 Comparaisons

Proposition 8 (*Comparaison*)

Soient $a < b$ (finis ou non) et f, g deux fonctions continues sur $]a, b[$ telles que $\forall t \in]a, b[$, $0 \leq f(t) \leq g(t)$. Alors,

Remarque : Attention : il faut absolument que f soit positive.

Exercice 10

4 Convergence absolue.

Définition 3 (*Convergence absolue*)

Remarque : On dit également que f est intégrable sur $]a, b[$ si f est absolument convergente sur $]a, b[$.

Théorème 1 (*Convergence absolue*)

Soient $a < b$ (finis ou non) et f une fonction continue sur $]a, b[$.

Exercice 11