


# Chapitre 21: Convexité - Étude de fonctions

## **Savoir Faire:**


- Étudier le caractère  $\mathcal{C}^n$  ou  $\mathcal{C}^\infty$  d'une fonction.
- Étudier la convexité d'une fonction
- Étude de fonction.

## I - Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ .

### 1 Dérivées successives

 *Qu'appelle t-on dérivée seconde ?*

#### Définition 1 (*Dérivées successives*)

 **Remarque :** La dérivée seconde est souvent notée  $f''$ .

 *Exercice 1*

## 2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

 Rappeler ce qu'est une fonction de classe  $\mathcal{C}^0$  et  $\mathcal{C}^1$ .

### Définition 2 (*Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$* )


Soit  $n \in \mathbb{N}$


 **Remarque :**  $\mathcal{C}^n(I)$  est l'ensemble des fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  qui sont de classe  $\mathcal{C}^n$ .

 *Exercice 2*

## 3 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$


### Proposition 1 (*Opérations*)

 **Remarque :** Toutes les fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, puissances, ...) sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur leur ensemble de définition sauf :

 *Exercice 3*

## II - Convexité et point d'inflexion

### 1 Définition, interprétation graphique


 Quelles fonctions sont convexes ? Concaves ?


#### Définition 3 (*Segment*)


Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  alors le segment  $[a, b]$  peut être décrit par :

#### Définition 4 (*fonction convexe*)

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

 **Remarque :**  $f$  est convexe si et seulement si sa courbe représentative est en dessous de ses cordes.

 **Remarque :** Si on a

 **Remarque :**

 *Montrer en raisonnant par équivalent que  $f(x) = x^2$  est convexe sur tout intervalle  $[a, b]$ .*

### Définition 5 (*Point d'inflexion*)

### Exemple 1 ()

☞ **Remarque :** Si la courbe admet un point d'inflexion alors ce n'est pas un extremum local

## 2 Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

☞ *Lien entre fonction  $\mathcal{C}^1$  et convexité*


### Proposition 2 (*Convexité et fonctions $\mathcal{C}^1$* )

## 3 Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

☞ *Lien entre fonction  $\mathcal{C}^2$  et convexité*

### Proposition 3 (*Convexité et fonctions $\mathcal{C}^2$* )

☞ **Remarque :** En général, on montre qu'une fonction est convexe (ou concave) pour pouvoir la tracer plus précisément et pour obtenir des inégalités .

 *Exercice 4 et Exercice 5*

## Proposition 4 (*Points d'inflexions et fonctions $\mathcal{C}^2$* )

### Exercice 6

## III - Étude complète de fonction

### 1 Études préliminaires

Nous utiliserons la fonction de l'exercice 13 de la feuille de *TD* dans toute cette partie, à savoir,

$$f(t) = \begin{cases} t \ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$


#### **Domaine de définition**

Le domaine de définition est souvent donné. Mais dans le cas contraire,

1. On vérifie que toute expression du dénominateur est différente de 0.
2. On vérifie que toute expression dans une racine est supérieure ou égale à 0.
3. On vérifie que toute expression dans un logarithme est strictement supérieure à 0.

#### **Étudier la parité**

1. On vérifie que le domaine de définition est symétrique.
2. On calcule  $f(-x)$ .

 **Remarque :** Si la fonction est paire, la courbe sera symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Si la fonction est impaire, la courbe sera symétrique par rapport à l'origine.

### Étudier la continuité, le caractère $\mathcal{C}^1$

1. Déterminer les points problématiques.
2. Calculer les limites pour montrer la continuité
3. Calculer la limite du taux d'accroissement pour le caractère  $\mathcal{C}^1$

## 2 Tableau de variation

### Étudier les variations

1. Montrer que la fonction est dérivable sur l'ensemble de définition.
2. Calculer la dérivée.
3. Étudier le signe de la dérivée

### Déterminer les limites

Déterminer les limites de la fonctions aux bords de l'ensemble de définition.

1. Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$ , on a une asymptote horizontale à la courbe en l'infini.
2. Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ , on a une asymptote verticale à la courbe en  $x = a$ .

### Tracer le tableau de Variation

| Tracer le tableau en y apportant tout éléments utiles pour le tracé de la courbe.

## 3 Tracé de courbe

### Equation de la tangente

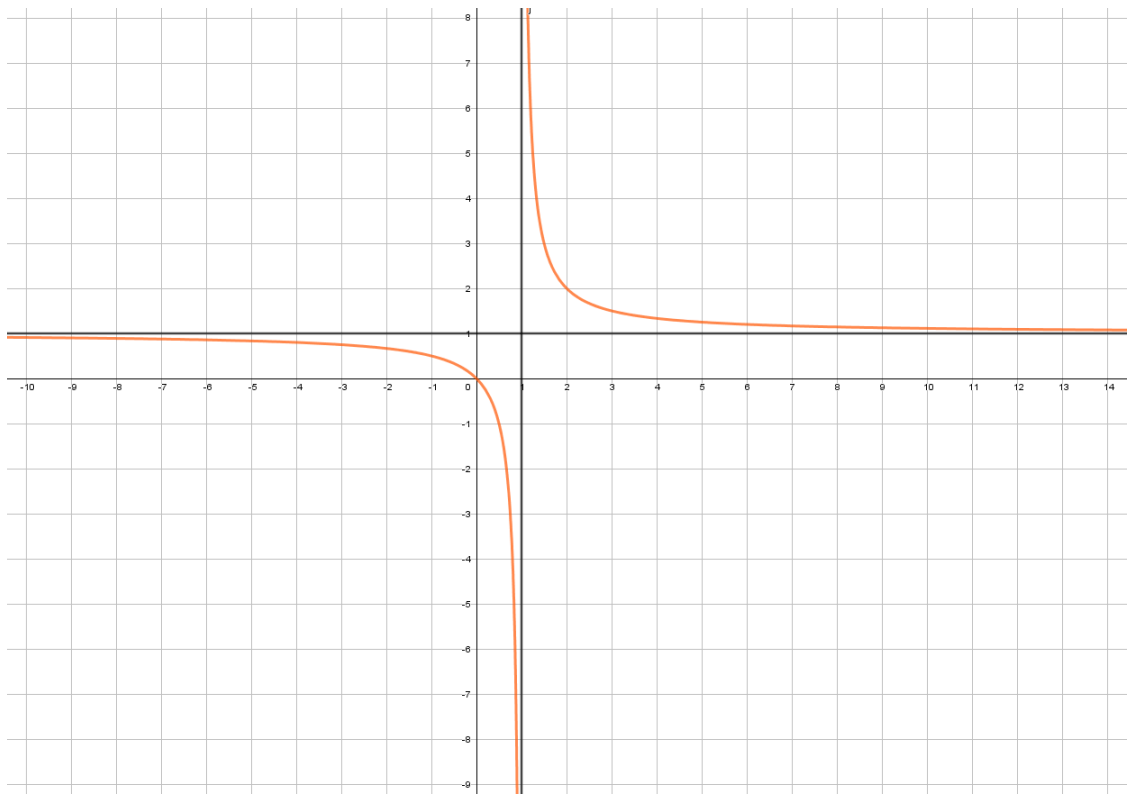
| Définition de l'équation de la tangente

### Convexité de la courbe

1. Montrer que la fonction est de classe  $\mathcal{C}^2$ .
2. Calculer la dérivée seconde.
3. Étudier le signe de la dérivée seconde.

### Tracé de courbe

1. On trace les asymptotes
2. On trace les tangentes et les tangentes verticales.
3. On met les points utilisés dans le tableau de variation.
4. On fait attention aux points particuliers, à la convexité, à la parité.



**Figure 1** – Asymptotes verticale et horizontale

**💡 tangente horizontale**

! Point où la dérivée de la fonction est nulle.

**💡 Point d'inflexion**

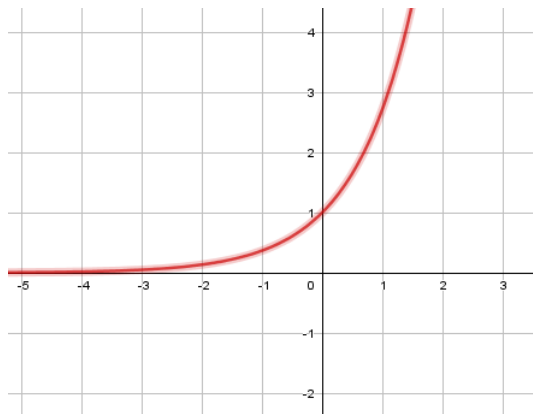
! Changement de convexité. La dérivée seconde de la fonction doit être nulle.

**💡 Point anguleux**

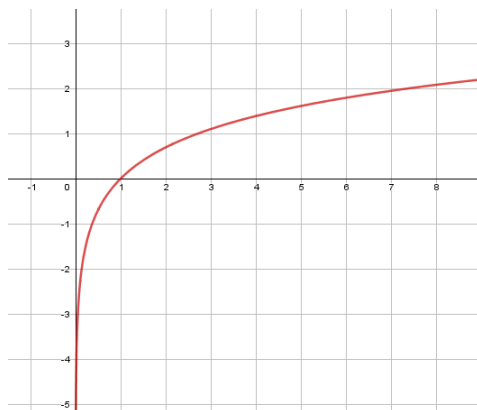
! Point où il y a deux demi-tangentes

**💡 Point Rebroussement**

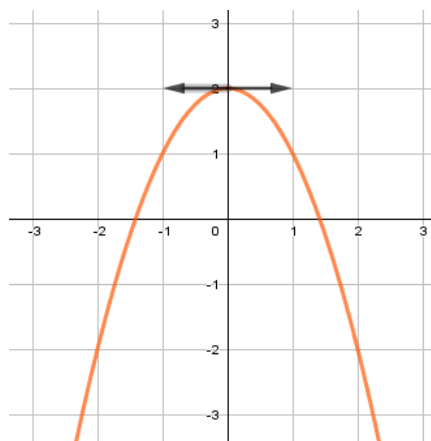
! Point où la tangente est verticale (la limite de la dérivée est  $\pm\infty$ ).



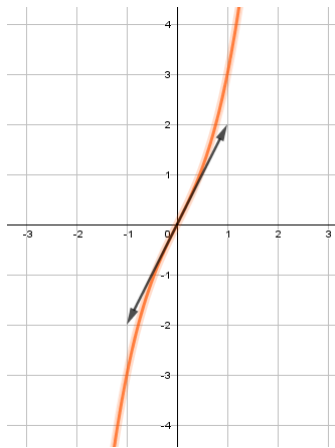
**Figure 2** – Fonction convexe



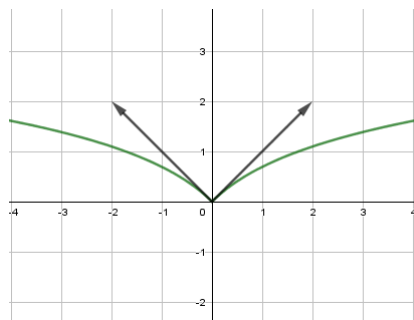
**Figure 3** – Fonction concave



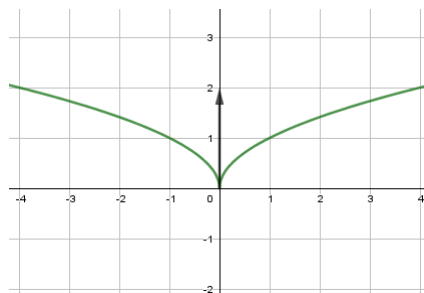
**Figure 4** – Tangente horizontale



**Figure 5** – Point d'inflexion



**Figure 6** – Point anguleux



**Figure 7** – Point de rebroussement