

# Chapitre 20: Variable aléatoires discrètes

## **Savoir Faire:**

- Déterminer une loi de probabilité discrète.
- Calculer l'espérance ou la variance.
- Loi géométrique et loi de Poisson.
- Étude des suites de variables aléatoires.

## *Exercice 1*


## I - Variable aléatoire

### 1 Complément sur les variables aléatoires


#### Définition 1 (*Variable aléatoire*)

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probablisé. On appelle variable aléatoire sur  $\Omega$  toute application  $X$  de  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \{\omega \in \Omega, / X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

 **Remarque :**

 **Remarque :** Nous parlerons en général de variable aléatoire sans forcément préciser réelle

 **Remarque :** Si  $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$  où  $I$  est une partie finie ou infinie de  $\mathbb{N}$  ou de  $\mathbb{Z}$ , la variable aléatoire est discrète. Sinon, elle est à densité.

 *Donnez des exemples de variables aléatoires*

### Définition 2 (Notations)


Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ . On note pour simplifier les évènements :

 *Exercice 2*


### Proposition 1 (Opérations sur des VA)

 *Exercice 3*

## 2 Formule des probabilités totales

 Que dire des  $(X = i)$  pour tous les  $i \in X(\Omega)$  ?

**Proposition 2** (*Systeme complet associé à X*)

 **Remarque** : Cela signifie que  $\sum_{i \in X(\Omega)} P(X = i) = 1$  et si  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  alors on a

$$\sum_{i=0}^{+\infty} P(X = i) = 1$$

**Théorème 1** (*Formule des probabilités totales pour une VA*)

Soit  $X$  une VA discrète définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

 *Exercice 4*

### 3 Transformation d'une variable aléatoire discrète

#### Définition 3 (*Transformation d'une VA*)

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et  $g$  une application de  $X(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$ . L'application

$$Y : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow \mathbb{R} \\ w & \longmapsto g(X(w)) \end{cases}$$

est une variable aléatoire notée  $g(X)$ .

☞ **Remarque :**  $g(X)$  est en fait la composée  $g \circ X$  définie sur  $\Omega$  par  $g \circ X(\omega) = g(X(\omega))$

☞ **Remarque :** On se servira notamment de la transformation pour le calcul de  $X^2$  (et donc de la variance)

#### Exercice 5


## II - Fonction de répartition d'une VA

### 1 Rappel sur la loi de probabilité

#### Définition 4 (*Loi*)

On appelle **loi d'une VA** de la variable aléatoire discrète  $X$  (ou **loi de probabilité** de  $\mathbf{X}$  ou **distribution de  $\mathbf{X}$** ) la donnée de  $P(X = x_i)$  pour tout  $x_i \in X(\Omega)$ .

 **Remarque :** On représente souvent la loi de  $X$  dans un tableau

 **Remarque :** Lorsque  $X$  prend une infinité de valeurs, il est évidemment difficile de présenter la loi de  $X$  sous la forme d'un tableau. On préfère dans ce cas écrire simplement, lorsque c'est possible, une formule pour  $P(X = x_k)$


#### Déterminer la loi d'une variable aléatoire $X$

1. Déterminer les valeurs prises par  $X$ , c'est à dire déterminer  $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$
2. Déterminer les probabilités corresp.  $p_i = P(X = x_i)$ .

#### *Exercice 6*

## 2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

### Définition 5 (*Fonction de répartition*)

 **Remarque :** En statistique, la fonction de répartition correspondrait à la fréquence des effectifs cumulés croissants.

### *Exercice 7*

 **Remarque :** Lorsque la variable aléatoire  $X$  est discrète, sa fonction de répartition est une fonction constante par morceau.

### *Propriétés de la fonction de répartition ?*

### Proposition 3 (*Fonction de répartition*)

Soient  $X$  une variable aléatoire discrète et  $F_X$  sa fonction de répartition. Alors :

### *Preuve de la proposition*

#### Proposition 4 (*Fonction de répartition et loi*)

Soient  $X$  une variable aléatoire discrète et  $F_X$  sa fonction de répartition .

🌀 **Remarque :** Cette proposition permet donc de définir la loi d'une variable  $X$  à partir de sa fonction de répartition. On a donc ce résultat très important qui dit que la loi d'une VA discrète est entièrement déterminée par la donnée de sa fonction de répartition.

#### 🔪 *Exercice 8*


### III - Paramètres d'une variable aléatoire

#### 1 Espérance

👁️ *Comment calcule-t-on une espérance ?*

#### Définition 6 (*Espérance d'une variable aléatoire*)

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .


 **Remarque :**

- Puisque l'espérance est définie sous condition de convergence d'une certaine série, cette dernière n'existe pas forcément !
- On parle aussi de moyenne à la place d'espérance.
- Si  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ , sous réserve de convergence de la série, on a  $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k)$ .
- Dans le cas où la variable aléatoire est **finie**, son espérance existe toujours car la série est en fait une somme finie de réels.

 *Exercice 9*

**Proposition 5 (*Bornes de l'espérance*)**

Si  $X(\Omega) \subset [p, q]$  et  $X$  admet une espérance alors  $p \leq E(X) \leq q$ .

 **Remarque :** Notamment, si  $X$  est positive,  $E(X) \geq 0$

**Proposition 6 (*Linéarité de l'espérance*)**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  admettant une espérance et  $a, b$  deux réels.


- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

**Définition 7 (*Variable aléatoire centrée*)**

Toute variable aléatoire admettant une espérance nulle est dite centrée.


 *Exercice 10*

## 2 Formule de transfert

 *Comment calculer  $E(X^2)$  ?*

### Théorème 2 (Formule de transfert)

Soit  $X$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et  $g$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

 **Remarque :** Dans le cas où  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et que l'espérance existe, on a

$$E(g(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)P(X = k)$$

 *Exercice 11*

### 3 Moments d'une variable aléatoire discrète

#### Définition 8 (*Moments d'ordre $r$* )


Soit  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $X$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

#### Remarque :

- Toute variable aléatoire discrète finie admet des moments à tous les ordres  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .
- Le moment d'ordre 1 d'une VA  $X$  est son espérance  $E(X)$ .
- Si  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ ,  $E[X^p] = \sum_{k \in \mathbb{N}} k^p P(X = k)$ .

#### Exercice 12

## 4 Variance

 *Quel est la variance d'une VA, l'écart type ?*

### Définition 9 (*Variance*)

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

### Théorème 3 (*Formule de Koenig-Huygens*)

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  admettant un moment d'ordre 2. On a

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

 *Que dire de  $\text{Var}(aX + b)$  ?*

### Proposition 7 ()

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a


### Définition 10 (*Variable aléatoire réduite*)

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  admettant un moment d'ordre 2. On dit que  $X$  est réduite si  $\sigma(X) = \text{Var}(X) = 1$ .

 *Exercice 13*

## IV - Loi usuelle discrètes infinies

### 1 Loi géométrique

 *Reprendre l'exercice 1. Quelle était la loi de  $X$  ?*

#### Définition 11 (Loi géométrique)

Soit  $p \in ]0; 1[$ . On pose  $q = 1 - p$ .

#### Exemple 1 (Modélisation de la loi géométrique)


La loi géométrique correspond à l'obtention du premier succès lorsqu'une épreuve de Bernoulli se répète de manière indépendante.

 *Exercice 14*

#### Théorème 4 (Espérance et Variance de la loi géométrique)

 *Démonstration du théorème*

## 2 Loi de Poisson

 La loi de Poisson permet de modéliser durant un temps  $t$  la réalisation d'événements dont la probabilité de se réaliser est très petite. Par exemple des séismes sur un temps long, des taux de pannes d'appareils électriques etc... Mais aussi en finance, pour mesurer la probabilité de défaut d'un crédit. Le paramètre  $\lambda$  fait varier la manière dont apparaissent ces événements.

### Définition 12 (*Loi de Poisson*)

### Exercice 15

### Proposition 8 (*Espérance et variance de la loi de poisson*)

### Démontrer cette proposition