Chapitre 2
Généralités sur les fonctions

Savoir Faire:

— Composer une fonction.
— Déterminer la parité d'une fonction.
— Trouver un minorant ou un majorant.
— Résoudre une inéquation.
— Calculer des limites sans formes indéterminées.
— Étudier une fonction

I - Propriétés des fonctions

1 Opérations sur les fonctions.

Définition 1 (*Opérations de fonctions*)

Soient f et g, deux fonctions définies sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$.

1. La fonction somme $f+g$ est défini par
$$f+g : x \in \mathcal{D} \to f(x)+g(x).$$
2. La fonction produit fg est défini par
$$fg : x \in \mathcal{D} \to f(x) \times g(x).$$
3. Si pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $g(x) \neq 0$ alors la fonction quotient $\frac{f}{g}$ est définie par
$$\frac{f}{g} : x \in \mathcal{D} \to \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Exercice 1

2 Parité, imparité.

Définition 2 (*Fonction paire*)

Une fonction f est dite paire si :

Définition 3 (*Fonction impaire*)

Une fonction f est dite impaire si :

Remarque : f est paire (resp. impaire) si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (resp. à l'origine).

Fonctions usuelles paires ou impaires

Déterminer si une fonction est paire, impaire, sans parité

— Pour déterminer la parité d'une fonction, on procède en 2 étapes

1. On vérifie que le domaine de définition est bien symétrique par rapport à 0.
2. On prend x dans $\mathcal{D}_f$, on calcule $f(-x)$ et on essaie de retrouver $f(x)$ ou $-f(x)$.

— Pour démontrer qu'une fonction n'a pas de parité, on exhibe un contre-exemple : On cherche 2 nombres réels $x \in \mathcal{D}_f$ et $y \in \mathcal{D}_f$ tels que $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-y) \neq -f(y)$.

Montrer en trouvant un contre exemple que la fonction $P : x \to x^2 + x$ n'a pas de parité

Exercice 2

3 Majorant-Minorant

Reprenons la fonction prix de vente $p(x) = 115 - 4\sqrt{x}$. Pour x compris entre 9 et 300, on peut vérifier que cette fonction est toujours plus grande que 0 (ce qui est sensé !). On dit alors que 0 est un minorant de la fonction p.

Définition 4 (*Majorant - Minorant*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Exercice 3

II - Tableaux de variations

1 Sens de variation

Définition 5 (*Monotonie d'une fonction*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- On dit que f est croissante sur I si, pour tous nombres $x, y \in I$, on a
$$\text{Si } x < y \text{ alors } f(x) \leq f(y)$$
- On dit que f est décroissante sur I si, pour tous nombres $x, y \in I$, on a
$$\text{Si } x < y \text{ alors } f(x) \geq f(y)$$

Remarque : On utilisera plutôt cette définition pour résoudre des inégalités plus que pour montrer qu'une fonction est croissante. En effet, une fonction croissante conserve l'ordre d'une inégalité alors qu'une fonction décroissante le modifie.

Exercice 4

Remarque : On peut également définir la croissance (resp. la décroissance) stricte d'une fonction. On dit que f est strictement croissante (resp. décroissante) ssi pour tout $u, v, \in I$ tels que $u < v$, on a $f(u) < f(v)$ (resp. $f(u) > f(v)$).

Proposition 1 ()

— La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissante) est croissante (resp. décroissante).
— La composée de 2 fonctions ayant le même sens de variation est croissante.
— La composée de 2 fonctions ayant des sens de variations contraires est décroissante.

Démonstration directe de la propriété.

2 Dérivées de fonctions

Fonction	**Dérivée**	**Ensemble de dérivabilité**
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$	$f'(x) = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$

Remarque : Dans ce tableau, u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I.

Opérations basiques	**Dérivée**	**Conditions**
$f = u + v$	$f' = u' + v'$	
$f = ku\ (k \in \mathbb{R})$	$f' = ku'$	
$f = uv$	$f' = u'v + uv'$	
$f = \frac{1}{v}$	$f' = -\dfrac{v'}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I
$f = \frac{u}{v}$	$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I

Proposition 2 (*Dérivée d'une fonction composée*)

Composition	**Dérivée**	**Conditions**
$f = u^n\ (n \in \mathbb{N})$	$f' = nu'u^{n-1}$	
$f = u^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R})$	$f' = \alpha u'u^{\alpha-1}$	u strictement positif
$f = \sqrt{u}$	$f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	u strictement positif
$f = e^u$	$f' = u'e^u$	
$f = \ln(u)$	$f' = \dfrac{u'}{u}$	u strictement positif
$f = u(ax+b)$	$f' = a \times u'(ax+b)$	

Remarque : La dérivation sera vue plus en détail au second semestre. En attendant, nous l'utiliserons pour trouver le sens de variation d'une fonction.

Proposition 3 (*Lien avec le sens de variation*)

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

Exercice 5

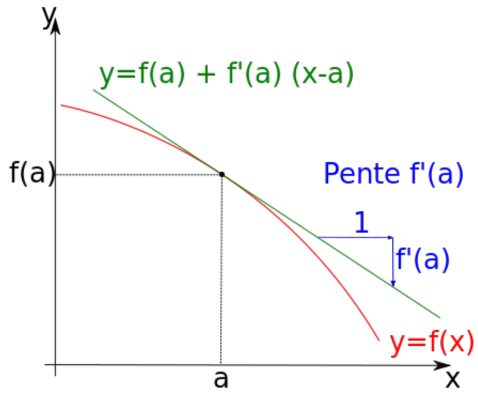
Définition 6 (*Tangente*)

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et dérivable en $a \in \mathcal{D}_f$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite T_a d'équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Le coefficient directeur de cette tangente est le nombre $f'(a)$.

Exercice 6



3 Maximum et minimum

Définition 7 (*Maximum-minimum*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle réel I. Soit $a \in I$.

Proposition 4 (*Lien avec la dérivée*)

Soit une fonction f est dérivable sur un intervalle $]a, b[$ ouvert. Si $c \in]a, b[$ est un minimum ou un maximum de la fonction f alors $f'(c) = 0$.

Exercice 7

III - Introduction aux limites

1 Limites de fonctions usuelles

Remarque : Tout comme les dérivées, les limites seront vues plus en détails dans un cours prochain.

Proposition 5 (*Fonctions usuelles*)

Fonctions	Limites à retenir
Puissances	
Inverse	
Racine carrée	
Logarithme	
Exponentielle	
Valeur absolue	

2 Opérations sur les limites

Proposition 6 (*Limite de $f+g$*)

$\lim g$ \ $\lim f$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'			
$+\infty$			
$-\infty$			

Exemple 1 ()

$$\lim_{x \to +\infty} x + \sqrt{x} = +\infty$$

Exercice 8

Proposition 7 (*Limite de $f \times g$*)

$\lim g$ \ $\lim f$	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$				
0				
$+\infty$				
$-\infty$				

Exemple 2 ()

$$\lim_{x \to +\infty} x \times \sqrt{x} = +\infty$$

Exercice 9

Proposition 8 (***Limite de*** $\boldsymbol{\dfrac{f}{g}}$)

$\lim f$ / $\lim g$	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$				
0^+				
0^-				
$+\infty$				
$-\infty$				

Exemple 3 ()

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{x}} = 0 \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$$

Exercice 10

3 Limite d'une fonction composée

Comment déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+1}$ *?*

Proposition 9 (*Limite de fonctions composées*)

Soient f, g, h trois fonctions telles que $f(x) = g(h(x))$ sur un intervalle I.

Déterminer la limite de $f(x) = g(h(x))$ en x_0

1. On pose $X = h(x)$.
2. On détermine la limite b de $h(x)$ en x_0.
3. On détermine la limite c de $g(X)$ en b, et on conclut : la limite de f en x_0 vaut c.

Exemple précédent puis Exercice 11