

Chapitre 19: Techniques d'intégration

Savoir Faire:

- Étudier une suite définie par une intégrale
- Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties
- Calculer une intégrale à l'aide d'un changement de variable.
- Reconnaître une somme de Riemann et calculer sa limite.


I - Propriétés d'encadrement et valeur moyenne.

1 Encadrement


 *Si une fonction f est positive, que dire de l'intégrale de f ?*

Proposition 1 (*Positivité de l'intégrale*)

Soit f une fonction **continue** sur un segment $[a; b]$ avec $a \leq b$.

 **Remarque :** Il faut absolument que $a \leq b$ et que les fonctions soient continues

 *Démonstration de la propriété et Exercice 1*

 *Que dire si f est positive d'intégrale nulle ?*

Corollaire 1

2 Valeur moyenne d'une fonction

 *Comment définir une valeur moyenne pour une fonction ?*

Définition 1 (Valeur moyenne)

Soit f une fonction continue sur un segment $[a; b]$. Le nombre réel

Théorème 1 (Inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$

 *Démonstration de deux façons*

 *Exercice 2*

Théorème 2 ()

 *Démonstration du théorème*

 *Redonner l'inégalité triangulaire*

Théorème 3 (*Inégalité triangulaire*)

Soit f une fonction **continue** sur un segment $[a; b]$ avec $a \leq b$ alors


 *Exercice 3*

II - Méthode de calcul d'intégrales

1 Intégration par parties

 *Rappeler la formule de dérivation $(uv)'$*

Théorème 4 (Intégration par partie)

 *Démonstration directe du théorème*

Intégration par partie

Pour calculer une intégrale par intégration par partie, on détermine les fonctions u et v qui interviennent et on vérifie qu'elles sont de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle considéré.


 *Exercice 4*

2 Changement de variable

 Rappeler la formule de dérivation pour $(u \circ v)'$

Théorème 5 (Changement de variable)

Si f est une fonction continue sur $[a; b]$ et φ une fonction de classe C^1 sur $f([a, b])$ alors :

 **Remarque :** La plupart du temps, le changement de variable sera donné (les seuls que vous devez savoir trouver sont ceux de la forme $u = at + b$)

 *Exercice 5*

Changement de variable

Soit $I = \int_a^b f(t)dt$. On veut remplacer la variable t par la variable x .

1. On écrit x en fonction de t . (donné souvent dans l'énoncé)
2. On écrit dx en fonction de dt (en dérivant)
3. On remplace 3 choses
 - (a) On remplace dt par la formule avec dx
 - (b) Tous les t doivent être remplacé par des x
 - (c) Les bornes de l'intégrale doivent être changés.

 *Exercice 6*

III - Somme de Riemann

 *Comment définir les intégrales à l'aide de rectangle ?*

Définition 2 (Somme de Riemann)

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et $n \geq 1$.

Théorème 6 (Somme de Riemann)

 *Exercice 7*