

# Chapitre 18: Introduction aux espaces vectoriels

## **Savoir Faire:**

- Montrer qu'un vecteur s'écrit comme combinaison linéaire d'autres vecteurs.
- Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel.
- Trouver une famille libre, génératrice ou une base d'un sous espace vectoriel
- Exprimer et simplifier un espace vectoriel sous la forme d'un Vect.

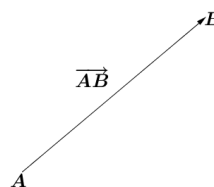
## I - Rappels sur les vecteurs

### 1 Vecteur du plan

#### Définition 1 (*Vecteur*)

Un vecteur est défini par :

- une longueur
- une direction
- un sens



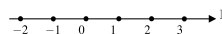
#### Proposition 1 ()

On peut également définir un vecteur du plan à l'aide de deux coordonnées  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

### 2 Vecteur et dimension

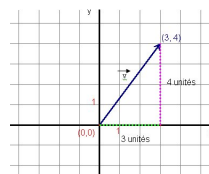
Droite des réels  $\mathbb{R}$  (Dimension 1)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \end{pmatrix}$$



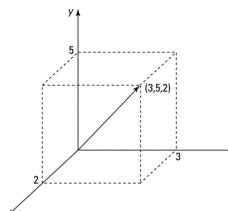
Plan réel  $\mathbb{R}^2$  (Dimension 2)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Espace  $\mathbb{R}^3$  (Dimension 3)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



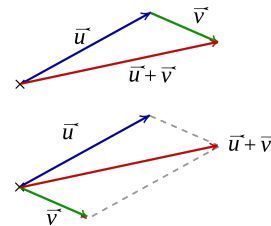
*Que dire des vecteurs dans des espaces de dimension supérieures ?*

### 3 Calculs avec des vecteurs

👁️ *Quels calculs peut-on faire avec des vecteurs ?*

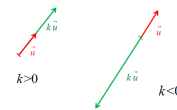
Addition de 2 vecteurs

- $\vec{u} + \vec{v}$  est un vecteur
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  (commutativité)
- $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$  (associativité)
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$  (élément neutre)



Multiplication par un réel  $\lambda$

- $\lambda \cdot \vec{u}$  est un vecteur
- $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$  (distributivité)
- $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$
- $\lambda \cdot (\mu\vec{u}) = (\lambda \times \mu) \cdot \vec{u}$



## II - Espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

### 1 Définition

👁️ *Loi internes et lois externes ?*

**Définition 2 (Loi de composition interne et externe)**

Soit  $E$  un ensemble non vide :

- On dit que la loi  $+$  est une **loi de composition interne** sur  $E$  si :

$$\forall x, y \in E, \quad x + y \in E$$

- On dit que la loi  $\cdot$  est une **loi de composition externe** sur  $E$  si :

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot x \in E$$

🐜 *Donnez des exemples de lois interne ou externe*

### Définition 3 (*Espace vectoriel*)

On appelle **espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$**  ou  **$\mathbb{R}$ -espace vectoriel** tout ensemble **non vide**  $E$ , muni d'une loi de composition interne notée  $+$  et d'une loi de composition externe notée  $\cdot$  qui vérifient toutes les propriétés suivantes :  $\forall(x, y, z) \in E^3, \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

1. —  $x + y = y + x$  (Commutativité de la loi  $+$ )
  - $(x + y) + z = x + (y + z)$  (Associativité de la loi  $+$ )
  - $\exists 0_E \in E$  tel que  $\forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x$
  - $\forall x \in E$ , il existe  $y \in E$ , appelé opposé de  $x$  que  $x + y = 0_E$
2. —  $1 \cdot x = x$ 
  - $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$  (distributivité)
  - $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
  - $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$

🌀 **Remarque** : Les éléments de  $E$  sont appelés des vecteurs et les réels sont appelés des scalaires

🌀 **Remarque** : On n'utilisera jamais cette définition pour montrer qu'un espace est un espace vectoriel

👁️ *Démontrer que l'espace  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est un espace vectoriel*

## 2 Combinaisons linéaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

### Définition d'une combinaison linéaire

#### Définition 4 (Combinaison linéaire)

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$  une famille (ou  $p$ -uplets) de vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

### Exercice 1


#### Définition 5 (Famille libre)

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On dit qu'une famille  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$  de vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est libre ssi

### Exercice 2

**Définition 6 (*Famille génératrice*)**

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On dit qu'une famille  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$  de vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est génératrice ssi

 *Exercice 3*

### 3 Bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

#### Définition 7 (*Base*)

On dit qu'une famille  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$  de vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est une base ssi

#### Proposition 2 (*Base*)

#### Exercice 4

#### Proposition 3 (*Base canonique*)

La famille  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\dots$ ,  $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  est une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  appelée la base canonique.

 **Remarque :** Base canonique signifie que c'est la base la plus évidente.

#### Exercice 5

### III - Sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

#### 1 Sous espace vectoriel

Définition 8 (Sous espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ )

☞ **Remarque :** Pour montrer le premier point, on vérifie très souvent que le vecteur  $0$  appartient à  $F$ .

☞ **Remarque :** Un sous espace vectoriel est un espace vectoriel et c'est donc cette méthode que l'on utilise pour montrer qu'on a un espace vectoriel

 *Exercice 6*

### Proposition 4 ()

☞ **Remarque** : La contraposée de cette proposition est très utile pour montrer qu'un ensemble n'est pas un sev.

 *Exercice 7*

## 2 Sous espace vectoriel engendré

### Proposition 5 (*sous espace vectoriel engendré*)

Soit  $p \in \mathbb{N}$  et  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$  une famille de  $p$  vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

 *Exercice 8*

☞ **Remarque** : Si  $F = \text{Vect}(U_1, \dots, U_p)$  alors  $(U_1, \dots, U_p)$  est une famille génératrice de  $F$ .

✍ *Exercice 9*