Chapitre 17: Espaces probabilisés infinis

"C-3PO : - Les chances de traverser un champ d'astéroïde avec succès sont d'approximativement une sur 3720.
Han Solo : - Tu sais, moi et les probabilités. "

Star Wars : L'empire Contre-Attaque

Savoir Faire:
- Modéliser un problème de probabilité.
- Calculer la probabilité d'une union ou d'une intersection infinie
- Déterminer des lois de probabilités.
- Appliquer la formule des probabilité totales.

I - Espaces probabilisable

1 Introduction

1. Première situation : On lance trois fois un dé non truqué.
   - Quelle est la probabilité d'obtenir le premier 6 au premier lancer ? au deuxième ? au troisième ?
   - Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?

Univers Ω	Évènements $\mathcal{P}(\Omega)$	Probabilité P

2. Seconde situation : On lance un dé jusqu'à ce que l'on obtienne un 6.
   — Quelle est la probabilité d'obtenir le premier 6 au $n^{ième}$ lancer ?
   — Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?

Univers Ω	Évènements $\mathcal{P}(\Omega)$	Probabilité P

Remplir les deux tableau

2 Tribu

Quelles opérations connait-on sur les évènements ?

Définition 1 (*Tribu*)

Soit Ω un ensemble, $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$. On dit que $\mathcal{A}$ est une **tribu** de Ω si :
- $\Omega \in \mathcal{A}$,
- Stabilité du passage au complémentaire : $\forall A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{A}$,
- Stabilité de l'union dénombrable : si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{A}$ alors

$$\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Remarque : Une tribu est aussi appelée σ-algèbre d'évènements.

Proposition 1 (*Ensemble d'une tribu*)

Soit $\mathcal{A}$ *une tribu de* Ω. *Alors :*
- $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- Toute réunion (finie ou infinie) intersection (finie ou infinie) et complémentaire d'éléments de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$.

Définition 2 (*Espace probabilisable*)

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. L'ensemble $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace probabilisable.

Remarque : Puisqu'on est dans le cadre des probabilités, si $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable, tout ensemble $A \in \mathcal{A}$ est appelé événement. Ainsi, la tribu A contient l'ensemble des événements auxquels on va s'intéresser.

Exercice 1

3 Calculs avec les Évènements

Rappeler les règles de distributivité de 3 évènements et les lois de Morgan.

Théorème 1 (*Distributivité*)

Soit $\mathcal{A}$ une tribu. Soient $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des éléments de $\mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ un évènement. On a les règles de calculs suivantes :

Théorème 2 (*Lois de Morgan*)

Soit $\mathcal{A}$ une tribu. Soient $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (éléments de $\mathcal{A}$). On a :

4 Systèmes complet d'évènements

Rappeler ce qu'est un système complet d'évènement dans le cas fini

Définition 3 (*Système complet d'évènement*)

Soit $\mathcal{A}$ une tribu d'un ensemble Ω. *On appelle* **système complet d'évènements de** Ω toute famille $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que :

Exemple 1 (*Système complet d'évènements*)

On considère $\Omega = \mathbb{N}$.

II - Probabilité et espace probabilisé

1 Probabilité

Rappeler la définition d'une probabilité

Définition 4 (*Probabilité*)

Soit $\mathcal{A}$ une tribu d'un ensemble Ω. On appelle **probabilité** toute **application**

Exercice 2

2 Espace probabilisé

Définition 5 (*Espace probabilisé*)

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Proposition 2 ()

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

Théorème 3 (*Union d'évènements*)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soient A et B deux évènements. Alors

Exercice 3

III - Propriétés des probabilités

1 Limite monotone

Dans cette partie, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé

Définition 6 (*Suite croissante et décroissante d'évènements*)

Théorème 4 (*Limite monotone*)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de $\mathcal{A}$.

Exercice 4

Que dire de la limite monotone avec des évènements quelconques ?

Proposition 3 ()

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de $\mathcal{A}$. Alors

Preuve directe et Exercice 5

2 Évènement vrai presque surement

Dans les deux derniers exercices, nous avons obtenus des probabilités égales à 0 ou 1 alors que les évènements n'étaient ni impossible ni certain.

Définition 7 ()

Soit A un évènement de $\mathcal{A}$.

Remarque : Ce cas n'arrivait jamais dans un espace probabilisé fini. En effet, dans ce cas, $P(A) = 0$ si et seulement si $A = \emptyset$. C'est une particularité des espaces probabilisés infinis.

Exercice 6

3 Probabilité conditionnelle

Définition d'une probabilité conditionnelle et formule des probabilités composée ?

Définition 8 (*Probabilités conditionnelles*)

Soit $A \in \mathcal{A}$ un évènement de probabilité **non nulle**.

Théorème 5 (*Formule des probabilités composées.*)

Pour tous évènements $A_1, \dots, A_n$, on a

Exercice 7

Rappeler la FPT et la formule de Bayes.

Théorème 6 (*Formule des probabilités totales*)

Soit $(\Omega, \mathcal{A},\ P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un système complet d'évènements de Ω de probabilité non nulle. Alors on a

Théorème 7 (*Formule de Bayes*)

Soient $A, B \in \mathcal{A}$ deux évènements de probabilité non nulle.

Exercice 8

4 Indépendance mutuelle

Rappeler la définition d'évènements indépendants

Définition 9 (*Indépendance mutuelle*)

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite infinie d'événements de $\mathcal{A}$.

Exercice 9