


Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment


Savoir Faire:

- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive
- Calculer une intégrale en utilisant la linéarité ou la relation de Chasles.
- Étudier une intégrale fonction de sa borne supérieur.
- Étudier une intégrale dont les bornes sont des fonctions.

 *Si l'on lance votre cahier de mathématiques et un grain de sable du toit de Stanislas au même moment. Qui arrive le premier au sol ?*

I - Primitive

1 Définition


 Si l'on connaît la fonction cout, on peut calculer la fonction cout marginal. Mais que se passe-t-il si on ne connaît que la fonction cout marginal ?

Définition 1 (*Primitive*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .


 Déterminer deux primitives de $f : x \rightarrow e^x$ et de $g : x \rightarrow x^2$.

Proposition 1 (*Ensemble des primitives*)

 **Remarque :** Cette proposition montre qu'il n'y a pas unicité des primitives d'une fonction. Il en existe une infinité qui diffèrent d'une constante.

 *Démonstration de la propriété*

Proposition 2 (*Unicité des primitives*)

 **Remarque :** On comprend donc que si l'on impose une valeur à une primitive, celle-ci devient unique.

 Déterminer la primitive F de la fonction $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$ vérifiant $F(1) = 2$.

Théorème 1 (*Existence des primitives*)




☞ **Remarque :** Cette proposition permet donc dans la plupart des cas que nous rencontrons de n'avoir aucun problème d'existence d'une primitive d'une fonction.

 *Démonstration du théorème*

2 Primitives et fonctions usuelles

fonction f	Primitive F	Intervalle I
$x \rightarrow a \ (a \neq 0)$		\mathbb{R}
$x \rightarrow x^n \ (n \geq 1)$		\mathbb{R}
$x \rightarrow \frac{1}{x^n} \ (n > 1)$		$] -\infty; 0[\text{ ou }]0; +\infty[$
$x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$		\mathbb{R}_+^*
$x \rightarrow x^\alpha \ (\alpha \neq 1)$		\mathbb{R}_+^*
$x \rightarrow \frac{1}{x}$		$] -\infty; 0[\text{ ou }]0; +\infty[$
$x \rightarrow e^x$		\mathbb{R}

 Compléter le tableau et Exercice 1


3 Utilisation des formules de dérivation

fonction f	Primitive F
$2u'u$	
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	
$\frac{u'}{u^2}$	
$u'u^\alpha \ (\alpha \neq 1)$	
$\frac{u'}{u}$	
$u'e^u$	

 Compléter le tableau


Exercice 2


4 Opération sur les primitives

 Rappeler la dérivée d'une somme de fonctions

Proposition 3 (*Règles d'opérations des primitives*)

Soient F et G deux primitives respectives de f et de g sur un intervalle I et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors :

 **Remarque** : La preuve découle automatiquement des règles de calculs sur les dérivées :
, $(u + v)' = u' + v'$ et $(\lambda u)' = \lambda u'$.

 **Remarque** : Les formules de dérivée d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de
, fonctions étant plus compliqués, on ne **rien** dire à propos de la primitive.


Exercice 3

II - Intégrale sur un segment


1 Définition à l'aide des primitives

 *Lien entre intégrale et primitive ?*


Définition 2 (*Intégrale sur un segment*)

 **Remarque :** Par convention, on notera


 *Exercice 4*

 **Remarque :** L'intégrale de a à b de la fonction f ne dépend pas de la primitive choisie. En effet, si G est une autre primitive de f , nous avons vu qu'il existe un réel k tel que $G = F + k$. On a alors :

$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$$

 **Remarque :** Comme dans les sommes, la variable d'intégration est une variable muette. Cela signifie que l'on peut la remplacer par n'importe quelle lettre :

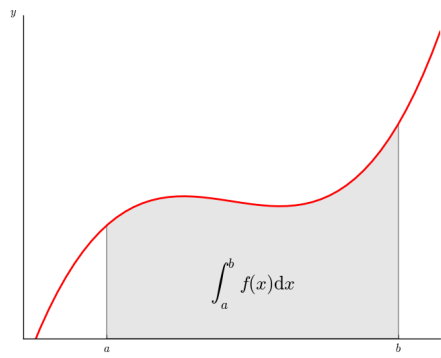
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$

 **Remarque :** Pour c une constante, $\int_a^b c dt = (b - a)c$. Cela signifie que l'intégrale d'une constante est égale à "constante fois longueur de l'intervalle".

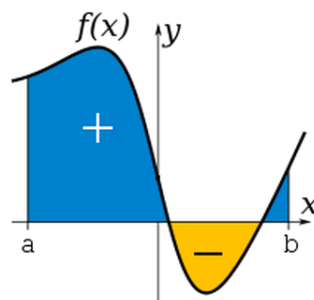
2 Définition à l'aide de l'aire sous la courbe

Proposition 4 (*Aire sous la courbe*)

Soit f est une fonction **continue** et **positive** sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx$ est égal à l'aire du domaine compris entre la courbe de f , l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ (exprimée en unité d'aire. (U.A.))



☞ **Remarque :** Dans le cas où la fonction est négative, l'intégrale correspond à -1 fois l'aire sous la courbe. On parle alors d'aire signée (ou aire algébrique).



Exercice 5

III - Propriétés de l'intégrale


1 Inversion des bornes

Proposition 5 (*Inversion des bornes*)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et soient a et b deux réels de I .

 *Preuve de la propriété*

2 Relation de Chasles

 *Qu'appelle-t-on relation de Chasles ?*

Théorème 2 (*Relation de Chasles*)


 *Preuve et Exercice 6*

Proposition 6 (*Parité*)

Soit f une fonction continue sur $[-a; a]$ ($a > 0$).

Exercice 7

3 Linéarité

 Que dire de $\int_a^b \lambda f(t)dt$ et $\int_a^b f(t) + g(t)dt$?

Proposition 7 (*Linéarité de l'intégrale*)

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a; b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :

Exercice 8

4 Primitive nulle en un point

Théorème 3 (*Primitive d'une fonction*)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , $x_0 \in I$.

 *Preuve du théorème et Exercice 9*