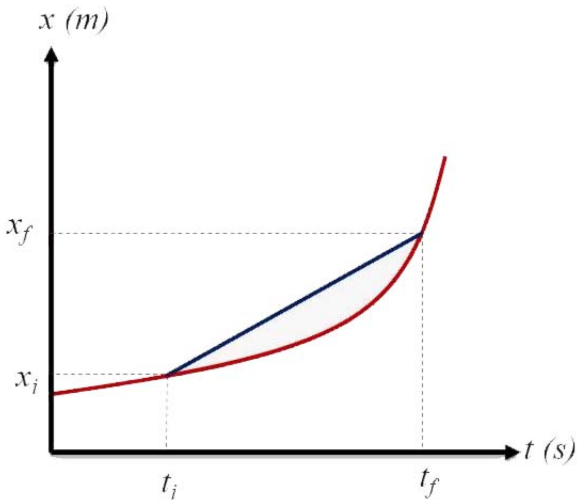
# Chapitre 14: Calcul différentiel

## I - Dérivabilité en un point

### 1 Modélisation de la vitesse et du coût marginal

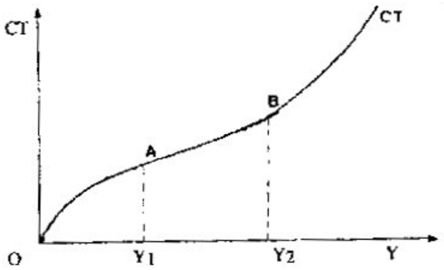
*Quelle est la formule de la vitesse ?*

*On considère une voiture qui se déplace en ligne droite. La distance qu'elle parcourt en fonction du temps est donnée par la courbe suivante - Quelle est sa vitesse moyenne entre les temps $t_i$ et $t_f$ ?*




*Quelle est la vitesse instantanée ?*

*On considère une entreprise produisant des objets dont le cout de production $C$ est une fonction de la quantité d'objet produit. Quel est le cout marginal de la 10ème unité fabriquée ?*




*On considère maintenant une entreprise dont le cout de production $C$ est une fonction de $q$ la quantité d'objet produit exprimée en million d'unité. Exprimer le cout marginal de la 10 millionième unité produite.*

## 2 Dérivabilité en un point

*Rappeler les limites avec le taux d'accroissement*

**Définition 1 (*Dérivabilité en un point*)**

**Remarque :**

• On a aussi

• Comme dans le cas de la continuité, il est nécessaire pour la fonction d'être définie au point $x_0$ pour y être dérivable.

*Exercice 1*

**Exemple 1 (*Taux d'accroissement usuels*)**

On rappelle les deux taux d'accroissements classique :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = e^0 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+0} = 1$$

**Proposition 1 ()**

**Remarque :** Attention ! La réciproque est fausse !

*Donner un exemple de fonction $f$ continue en un point $x_0$ mais non dérivable en ce point.*

**Remarque :**

## 3 Dérivabilité à droite et à gauche

*En s'inspirant de la continuité, comment définir la dérivabilité à gauche et à droite.*

**Définition 2 (*Dérivabilité à droite et à gauche*)**

— On dit que la fonction f est **dérivable à gauche en** $x_0$ lorsque

— On dit que la fonction f est **dérivable à droite en** $x_0$ lorsque

*Exercice 2*

**Remarque :** A la différence de la continuité, il n'est pas suffisant pour être dérivable en un point d'être dérivable à gauche et à droite ! Il faut une condition supplémentaire.

**Proposition 2 (*Dérivabilité à gauche et à droite*)**

On suppose que $I$ est un intervalle ouvert.

*Exercice 3*

## 4 Interprétation graphique

*Lien avec les tangentes.*

**Proposition 3 (*Tangente*)**

On note $C_f$ la courbe représentative de $f$.

1. Si $f$ est dérivable en $x_0$ alors

2. Si $f$ n'est pas dérivable en $x_0$

**Remarque :** Si la fonction est dérivable uniquement à droite (resp. à gauche), on parle de demi-tangente en remplaçant $f'$ par $f'_d$ (resp. $f'_g$).

*Exercice 4*

*Que se passe-t-il pour la tangente lorsque la dérivée est nulle.*

**Remarque :** Lorsque la courbe représentative d'une fonction admet une tangente au point d'abscisse $x_0$ dont le coefficient directeur est nul, on dit que la tangente est horizontale.

**Remarque :** Lorsque la courbe représentative d'une fonction admet deux demies tangentes en un point d'abscisse $x_0$, on dit que ce point est anguleux.

*Dessins et Exercice 5*

**Remarque :** Lorsque la courbe représentative d'une fonction admet deux demies tangentes verticales en un point d'abscisse $x_0$, on dit que ce point un point de rebroussement.

*Dessin et Exercice 6*

## 5 Développement limité à l'ordre 1

*Tangente et développement limité à l'ordre 1*

**Proposition 4 (*Développement limité à l'ordre 1*)**

*Exercice 7*

# II - Dérivabilité sur un intervalle

## 1 Dérivés et opérations

*Dérivabilité sur un intervalle*

**Définition 3 (*Dérivabilité sur un intervalle*)**

**Remarque :** On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ si $f$ est dérivable sur $I$ et si sa dérivée $f'$ est continue sur $I$.

*Montrer que la fonction $x \to x^2$ est dérivable pour $x_0 \in \mathbb{R}$.*

**Proposition 5** (***Fonctions dérivables***)

| Dérivées et opérations<br>Dans ce formulaire, $u$ et $v$ sont des fonctions | | | |
|---|---|---|---|
| | Opérations sur les fonctions | Dérivées | Conditions |
| | $f = u + v$ | | $u$ et $v$ dérivables sur un intervalle $I$ |
| | $f = ku$ ($k$ constante) | | $u$ dérivable sur un intervalle $I$ |
| | $f = uv$ | | $u$ et $v$ dérivables sur un intervalle $I$ |
| | $f = \frac{1}{v}$ | | $v$ dérivable sur un intervalle $I$ et $v$ ne s'annule pas sur cet intervalle $I$ |
| | $f = \frac{u}{v}$ | | $u$ et $v$ dérivable sur un intervalle $I$ et $v$ ne s'annule pas sur cet intervalle $I$ |
| 1 | $f = v \circ u$ | $f' = u' \times (v' \circ u)$ | $u$ dérivable sur un intervalle $I$ à valeurs dans $J$, et, $v$ dérivable sur $J$. |
| | $f = u^{\alpha}$ | | selon les valeurs de $\alpha$ |
| | $f = \sqrt{u}$ | | $u$ dérivable sur un intervalle $I$ et $u > 0$ |
| | $f = e^u$ | | $u$ dérivable sur un intervalle $I$ |
| | $f = \ln u$ | | $u$ dérivable sur un intervalle $I$ et $u > 0$ |
| | $f(x) = u(ax + b)$ | | $ax + b$ appartient à un intervalle sur lequel $u$ est dérivable |

*Exercice 8*

## 2 Dérivée de $f^{-1}$

*Rappeler la définition de la fonction réciproque et dériver cette expression.*

**Proposition 6 (*Dérivée de la fonction réciproque*)**

*Retrouver la dérivée de la fonction* $\ln$ *en utilisant la dérivée inverse de l'*$\exp$.

**Montrer que $f^{-1}$ dérivable en un réel $y_0$.**

Pour montrer que $f^{-1}$ est dérivable en réel $y_0$ :

1. On écrit $y_0 = f(x_0)$ (soit $x_0 = f^{-1}(y0)$) et on montre que $f$ est dérivable en $x_0$.
2. On s'assure que $f'(x_0) \neq 0$. On peut alors conclure que $f^{-1}$ est dérivable en $y_0$, et que
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

*Exercice 9*

# III - Applications de la dérivation

## 1 Dérivée nulle sur un intervalle

*Que peut-on dire lorsque la dérivée est nulle ?*

**Proposition 7 (*Dérivée nulle*)**

**Remarque :** Si l'on a $f$ et $g$ dérivables sur un intervalle $I$. On a alors

$$f' = g' \Leftrightarrow f = g + cte$$

*Montrer la remarque et trouver un contre exemple quand $I$ n'est pas un intervalle.*

## 2 Monotonie et dérivée

*Sens de variation de $f$ en fonction de sa dérivée ?*

**Théorème 1 (*Sens de variation*)**

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $I$. Alors

**Exemple 2 (*Fonction cube*)**

La dérivée de la fonction $x \to x^3$ est strictement positive sauf en 0. Cette fonction est strictement croissante.

*Exercice 10*

## 3 Extremum et nombre dérivée

*Rappeler ce qu'est un extremum (local, global) ?*

**Proposition 8 (*Extremum et dérivée*)**

**Remarque :** Si $f'$ passe du négatif au positif, l'extremum est un minimum (ex : $x \to x^2$) et si $f'$ passe du positif au négatif, l'extremum est un maximum (ex : $x \to -x^2$)

**Remarque :** $f'(x) = 0$ est insuffisant. En effet la fonction cube, notée $f$ , vérifie $f'(0) = 0$ et pourtant 0 n'est pas un extrémum de $f$.

*Exercice 11*

## 4 Inégalité des accroissements finis

**Théorème 2 (*Inégalités des accroissements finis*)**

*Démonstration directe*

*Exercice 12*

**Corollaire 1**

*Déterminer les extrema de la fonction* $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x - 1$