Chapitre 11: Continuité

Savoir Faire:

- Montrer qu'une fonction est continue en un point
- Montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle
- Utilisation du théorème de la bijection.
- Manipuler les fonctions réciproques.

I - Continuité d'une fonction

1 Continuité en un point

Remarque : On définit rigoureusement la notion de continuité vue en terminale. Ce sera l'occasion de revoir le théorème des valeurs intermédiaires et un corollaire important : le théorème de la bijection. Dans toute cette partie, f désignera une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Définition 1 (*Continuité en un point*)

La fonction f est définie sur I et soit $x_0 \in I$

Exercice 1

Remarque : Pour que f soit continue en x_0, il est nécessaire qu'elle soit définie en x_0.

Proposition 1 (*Continuité en un point*)

Étudier la continuité en un point x_0
On calcule la limite à gauche et à droite de la fonction en x_0 et on regarde si la limite est égale à $f(x_0)$.

Exercice 2

2 Continuité sur un intervalle

Que dire de la continuité sur un intervalle

Définition 2 (*Continuité sur un intervalle*)

Remarque : Naïvement, une fonction est continue sur un intervalle si l'on peut dessiner sa courbe représentative sur cet intervalle sans lever le crayon.

Proposition 2 (*Continuité et fonctions usuelles*)

Comment définir les fonctions continues par morceaux ?

Définition 3 (*Continuité par morceaux*)

On dit qu'une fonction f est **continue par morceaux sur un intervalle I** si :

Les fonctions continues par morceaux se généralisent lorsqu'il y a un nombre **dénombrable** de discontinuité (i.e. qu'on peut compter). Cela permet de dire que la fonction partie entière est continue par morceau. Cette notion n'est pas au programme et c'est pour cela qu'on se contente de dire qu'il doit y avoir un nombre fini de points.

Dessin et Exercice 3

Comment montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle ?

Proposition 3 (*Opérations sur les fonctions continues*)

Si f et g sont deux fonctions **continues** sur un intervalle I et λ un nombre réel,alors :

— les fonctions $f+g$, λf et $f \times g$ sont **continues** sur I

— Si de plus f ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{g}{f}$ est **continue** sur I

— Soit h une fonction définie et continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$. Alors $h \circ f$ est une fonction continue sur I

Continuité des fonctions usuelles
Prouver la continuité de fonctions usuelles revient à trouver le domaine de définition de la fonction.

Exercice 4

Bilan : Étude de la continuité

1. On regarde la où la continuité ne pose pas de problème (à l'aide des fonctions usuelles) et là ou il y a des points de discontinuité
2. On fait la limite à gauche et à droite des points problématiques.
3. On conclut.

Attention : Bien comprendre la consigne

Exercice 5

3 Prolongement par continuité

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2 \ln(x^2)$. La fonction f est-elle continue ?

Définition 4 (*Prolongement par continuité*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I sauf en un réel a. On suppose que f est continue sur $I \setminus \{a\}$, et qu'il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$. On dit qu'on peut prolonger par continuité la fonction f en posant $f(a) = \ell$. On définit ainsi une nouvelle fonction, définie sur I, qui est continue sur I et coïncide avec f sur $I \setminus \{a\}$.

Remarque : Rigoureusement, on doit définir une nouvelle fonction $\tilde{f}$. En pratique, on confondra toujours f et $\tilde{f}$.

Exercice 6

II - Théorèmes liés à la continuité

1 Théorème de la limite monotone

Que dire d'une fonction continue, croissante et majorée ?

Théorème 1 (*Théorème de la limite monotone*)

Toute fonction f continue, croissante et majorée admet une limite finie en $+\infty$. De même, toute fonction continue, décroissante et minorée, admet une limite finie en $+\infty$.

Remarque : Ce théorème a peu d'intérêt pour les fonctions mais sera particulièrement utile dans sa version pour les suites.

2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2 (*Théorème des valeurs intermédiaires*)

Dessin et Exercice 7

Remarque :

- Attention : il n'y a pas forcément unicité de la solution.
- On peut obtenir l'image de l'intervalle par lecture du tableau de variations.

Théorème 3 (*Théorème des valeurs intermédiaires*)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exercice 8

Et si on écrit ce théorème lorsque y vaut 0 ?

Théorème 4 (*Théorème de Bolzano*)

Remarque :

Exercice 9

3 Image d'un segment par une fonction continue

Définition 5 (*Segment*)

Théorème 5 (*Fonction continue et segment*)

Remarque : Ce théorème énonce que f admet sur $[a;b]$ un maximum M et un minimum m.

Corollaire 1

Exercice 10

4 Théorème de la bijection.

Dans le cas où f est strictement monotone, on peut préciser le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 6 (*de la bijection*)

Remarque : On appliquera très souvent ce théorème pour $y = 0$.

Exercice 11

Remarque : La formule précédente est la définition même d'une bijection

Théorème 7 (*de la bijection (deuxième version)*)

Exemple 1 (*Bijections connues*)

La fonction $x \to x^2$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans R_+. Sa fonction réciproque est la fonction racine carrée.
La fonction $x \to exp(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Sa fonction réciproque est la fonction ln.

Remarque : Si deux fonctions sont en bijection, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Dessin et Exercice 12