


Chapitre 10: Systèmes d'équations linéaires

i Savoir Faire:

- Résoudre un système d'équation linéaire
- Inverser une matrice
- Résoudre un système à paramètre.

 *Un troupeau est composé de dromadaires et de chameaux. On compte 90 têtes et 152 bosses. Combien y a-t-il d'animaux de chaque espèce ?*

I - Système d'équation linéaire

1 Définition

Définition 1 (*Système d'équation*)



Exercice 1




Remarque :

- Tous les systèmes n'admettent pas une unique solution. Certains n'en admettent aucune, d'autres une infinité.
- Résoudre un système revient à chercher les **p-uplets** (x_1, x_2, \dots, x_p) de réels qui sont **solutions** du système, c'est à dire qui vérifient simultanément les n équations L_1, L_2, \dots, L_n .
- Tout système homogène admet au moins une solution, le p-uplet $(0, 0, \dots, 0)$.
- Le système dans la définition s'écrit plus simplement $AX = B$ où $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice et $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $B = (b_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont deux vecteurs colonnes.




Exercice 2

2 Système de Cramer


 *Qu'est-ce qu'un système carré ?*


Définition 2 (Système Carré)

 **Remarque :** L'écriture matricielle d'un système carré fait intervenir une matrice carré.

Définition 3 (Système de Cramer)

 *Le système (S_1) de l'exercice 1 est-il de Cramer ?*

 **Remarque :** Un système homogène (S) de n équations linéaires à n inconnues est un système de Cramer si (S) admet la n-liste $(0, 0, \dots, 0)$ pour unique solution.

 *Lien entre système de Cramer et Matrices*

Théorème 1 (Système de Cramer)

 *Exercice 3*

II - Résolution d'un système échelonné



Résoudre le système $\begin{cases} x + y = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Définition 4 (*Systeme échelonné*)

On dit que le système (S) est **échelonné**

Il se présente alors sous la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n + \dots + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n + \dots + a_{2p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots \\ a_{nn}x_n + \dots + a_{np}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$



Exercice 4



Mettre sous forme matricielle le système triangulaire de l'exercice précédent. Que remarque-t-on ?



Remarque : Un système d'équation $AX = B$ est triangulaire si et seulement si



La résolution de systèmes échelonnés est simple (nous allons voir dans la suite de cette partie les différents types de systèmes échelonnés et comment exprimer leurs solutions.

Mais comment faire quand le système n'est pas échelonné ?

On se ramènera à un système échelonné à l'aide d'une méthode calculatoire appelée pivot de Gauss (partie III)

1 Cas d'un système de n équations à n inconnues

On est dans cette situation la :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & (L_2) \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n & (L_n) \end{cases}$$

Résolution d'un système échelonné

- Si tous les a_{ii} (les pivots) sont non nuls alors les équations, en partant de la dernière, permettent de calculer successivement x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 . Cela donne un système de Cramer.
- Si un des pivot est nul alors soit 2 équations sont les mêmes (cf cas 3), soit le système est incompatible, c'est à dire $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exercice 5

2 Cas où il y a plus d'équations (n) que d'inconnues (p)


Exercice 6

$$(S_8) : \begin{cases} 2x + y = 4 \\ y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad (S_9) : \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Plus d'équations que d'inconnues

On résout le système formé de par les p premières équations et s'il a des solutions, on remplace x_1, x_2, \dots, x_p dans les $n-p$ équations restantes, afin de vérifier si elles sont compatibles avec les p premières équations.

3 Cas où il y a moins d'équations(n) que d'inconnues (p)

 **Remarque :** On est dans le cas où l'on a moins d'équations que d'inconnues (on aura dans ce cas toujours une infinité de solutions)

Exercice 7

$$(S_{10}) : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

Plus d'inconnues que d'équations

Dans le cas d'un système de n équations à p inconnues : x_1, x_2, \dots, x_p avec $n < p$:

1. On choisit $p - n$ inconnues que l'on fixe comme des paramètres : $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_p$.
2. On résout le système de n équations à n inconnues x_1, \dots, x_n en fonction des paramètres fixés.

Résoudre l'exercice

III - Résolution d'un système quelconque

1 Opérations élémentaires

Définition 5 (*Opérations élémentaires*)

Soit (S) un système $n \times p$. On désigne par **opération élémentaire** l'une des trois opérations suivantes :


—
—
—




Exercice 8

2 Méthode du pivot de Gauss

Théorème 2 (Opérations élémentaires sur les systèmes)

 Remarque :


 **Pivot de Gauss**

1. Éliminer l'inconnue x_1 de toutes les équations à partir de la ligne 2. Si $a_{11} \neq 0$, alors on fait faire

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{1i}}{a_{11}} L_1$$

2. Recommencer cette opération pour éliminer x_2 à partir de la ligne 3 et ainsi de suite jusqu'à avoir un système échelonné.

 *Exercice 9*

 *Quand-est-ce que le système sera de Cramer ?*

Théorème 3 (Système de Cramer et Pivot de Gauss)

--

Remarque :

On peut tout à fait avant de démarrer la méthode, échanger des lignes ou décider de d'abord éliminer x_2 ou x_3 avant d'éliminer x_1 . Avec l'expérience vous devinerez le choix adéquat pour résoudre le plus simplement le système.

En effet il est toujours plus simple d'avoir 1 en coefficient à la première ligne de la première inconnue que l'on veut éliminer.

Exercice 10

3 Calcul de l'inverse d'une matrice



Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche à savoir si A est inversible et si oui à calculer son inverse.



Calcul par résolution d'un système


1. Résoudre le système $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. A est inversible ?
2. Traduire le résultat trouvé à l'étape 1 sous forme d'égalité matricielle et en déduire A^{-1}



Calcul de l'inverse de A et Exercice 11

Proposition 1 (*Calcul de l'inverse par opérations élémentaires*)

Supposons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est inversible alors on peut trouver un **nombre fini d'opérations élémentaires** qui transforment A en I_n matrice identité. En appliquant ces mêmes *opérations élémentaires* dans le **même ordre** à la matrice I_n , la matrice obtenue est A^{-1} .

 **Calcul de l'inverse par opération élémentaire**

On va mener les calculs avec la matrice à inverser à gauche et la matrice identité à droite en écrivant

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \left| \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right.$$

 *Montrer les calculs puis Exercice 12.*