


# Chapitre 1

## Fonctions usuelles et calculs

### **Savoir Faire:**

- Manipuler les racines carrées
- Simplifier des puissances
- Résoudre une équation
- Utiliser les formules de ln ou de exp
- Tracer des courbes
- Déterminer le domaine de définition d'une fonction
- Manipuler des quantificateurs
- Manipuler des valeurs absolues
- Manipuler la fonction partie entière

 Dans de nombreuses situations, une valeur recherchée dépend directement d'une (ou de plusieurs) autre(s) valeur(s).

 Par exemple, la demande du consommateur en bœuf dépend du prix auquel le bœuf est vendu, le nombre de particules fines de l'air dépend du nombre de voitures sur les routes... Toutes ces situations peuvent être modélisées en mathématiques à l'aide des fonctions.

### **Exemple 1 (*Fonction prix de vente*)**

Une enseigne vend des lecteurs blu-ray. Le prix de vente  $p(x)$  dépend de la demande hebdomadaire  $x$  pour un modèle particulier à travers la formule :

$$p(x) = 115 - 4\sqrt{x}, \quad 9 \leq x \leq 300$$

# I - Fonctions et Quantificateurs

## Définition 1 (*Fonction*)

🌀 **Remarque :** Les fonctions seront notées  $f$  ou  $x \rightarrow f(x)$ . Attention à ne pas confondre avec la notation  $f(x)$  qui est un nombre (c'est l'image du nombre  $x$  par la fonction  $f$ ).

📌 *Différentes représentation des fonctions.*

## Définition 2 (*Ensemble de définition*)

📌 *Dans les exemples précédents.*

## Exemple 2 ()

**Phrase Naturelle :** Pour tout nombre compris entre 0 et 1, la fonction prix de vente  $p$  est positive ou nulle.

**Phrase Mathématique :**  $\forall x \in [0; 1], p(x) \geq 0$ .

## Définition 3 (*Quantificateur*)

Tout au long de l'année, nous aurons besoin, afin d'écrire des phrases mathématiques, des quantificateurs suivants :

- Le symbole  $\forall$  signifie "Quel que soit" ou encore "Pour tout".
- Le symbole  $\exists$  signifie "il existe".
- Les symboles  $\exists!$  signifient : "il existe un unique".

 **Remarque** : Le symbole  $\in$  signifie "appartient à", "appartenant à".

 *Exercice 1.*

## II - Fonctions de références


### 1 Fonctions Polynômes


Définition 4 (*Fonctions Polynômes*)

Exemple 3 (*Polynômes particuliers*)


Les fonctions polynômes peuvent être :

- Des fonctions constantes :  $x \rightarrow 5$ .
- Des fonctions affines :  $x \rightarrow 4x + 3$ .
- Des polynômes du second degré :  $x \rightarrow x^2 - 4x + 4$ .

 *On veut tracer la droite d'équation  $y = 2x + 1$ .*

 **1ère méthode**

| Calculer deux points de la droite puis relier ces 2 points.

 **2nde méthode**

| Placer l'ordonnée à l'origine. Décaler de 1 vers la droite et monter (ou descendre) du coefficient directeur.

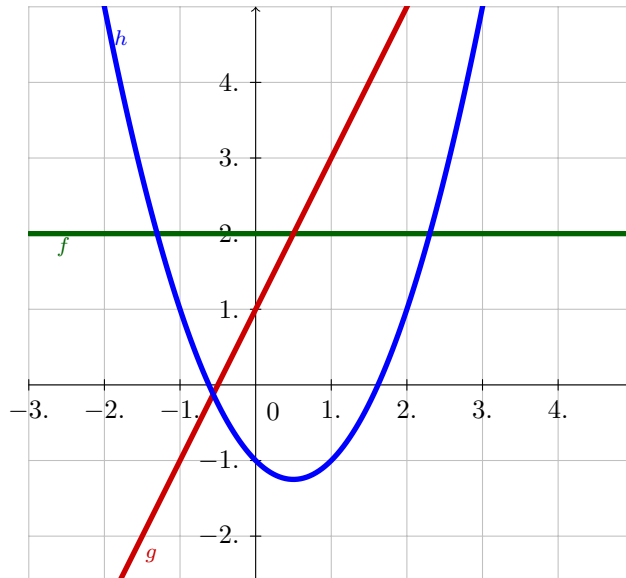
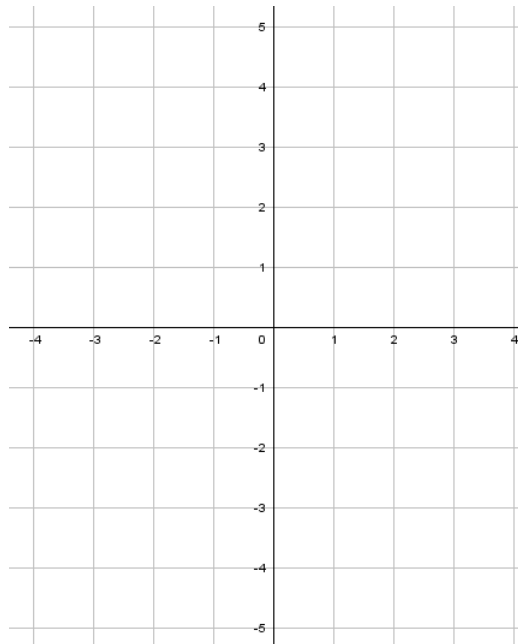
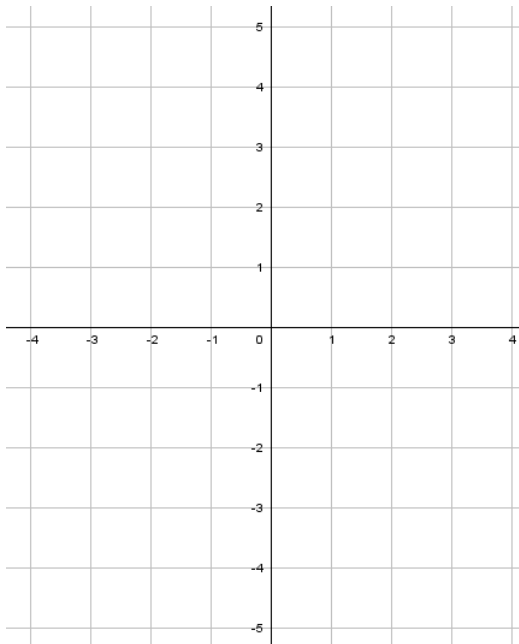


Figure 1 – Des fonctions polynômes



 Exercice 2

## 2 Fonction inverse

### Définition 5 (*Fonction inverse*)

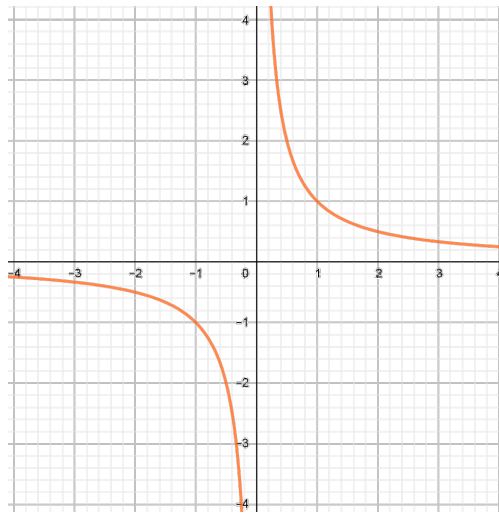


Figure 2 – Fonction inverse

**Proposition 1 (*Simplification*)**

Pour tous réels  $a, b$  et  $c$ , on a

$$\begin{array}{lll}
 \text{---} & \frac{a \times b}{a \times c} = \frac{b}{c} & \text{---} & \frac{a + b}{a + c} \neq \frac{b}{c} & \text{---} & \frac{a}{1} = a.
 \end{array}$$

**Proposition 2 (*Produit de fractions*)**

Dans un produit de fractions, on effectue toutes les simplifications possibles avant d'effectuer le produit des numérateurs et le produit des dénominateurs.

$$\begin{array}{lll}
 \text{---} & \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} & \text{---} & \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{c} & \text{---} & \frac{ab}{c} \times \frac{c}{ad} = \frac{b}{d}
 \end{array}$$

**Proposition 3 (*Produit de fractions*)**

On ne garde jamais une expression qui contient des barres de fractions superposées.

$$\begin{array}{lll}
 \text{---} & \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} & \text{---} & \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc} & \text{---} & \frac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}
 \end{array}$$

**Définition 6 (*Fonction rationnelle*)**

On appelle **fonction rationnelle** toute fonction qui s'écrit comme le quotient de deux fonctions polynômes.

**Exemple 4 (*Fonctions rationnelles*)**

$$f : x \rightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}, \quad g : x \rightarrow \frac{x - 1}{x + 1}, \quad h : x \rightarrow \frac{x^7 + 3x}{x(x^2 + 1)}$$

*Exercice 3*

### 3 Fonction racine carrée

#### Définition 7 (*Racine carrée*)

Pour tout nombre réel  $x$  positif, il existe un unique nombre réel positif, noté  $\sqrt{x}$  dont le carré vaut  $x$ . Ce nombre est appelée la racine carrée de  $x$

#### Proposition 4 ()

Pour tous réels  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$ , on a

$$- \sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$$

$$- \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}.$$

Il ne faut pas oublier que

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

#### Proposition 5 (*Réduction*)

Pour réduire des racines carrées on utilise  $\sqrt{a^2b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}$ .

#### Proposition 6 (*Quantité conjuguée*)

Quand on a une fraction de la forme  $\frac{a}{b + \sqrt{c}}$ , on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée  $b - \sqrt{c}$ . Cela permet de simplifier les dénominateurs qui n'ont alors plus de racines carrées.

#### Définition 8 (*Fonction racine carrée*)

La fonction  $x \rightarrow \sqrt{x}$  est définie sur  $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$  et est appelée fonction racine carrée.

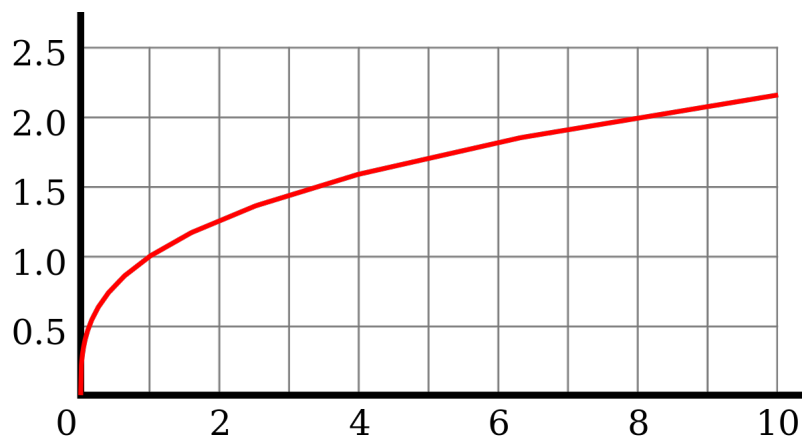


Figure 3 – Fonction racine carrée

#### Exercice 4

## 4 Fonction valeur absolue

### Définition 9 (*Fonction valeur absolue*)

La fonction valeur absolue est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

### Proposition 7 ()

La valeur absolue possède les propriétés suivantes.  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,

1.  $|a| \geq 0$

3.  $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

5.  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$

2.  $|a| = \sqrt{a^2}$

4.  $|ab| = |a| \times |b|$

On a également les propriétés pour résoudre des inégalités :

1.  $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$

2.  $|a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b \text{ et } a \geq b$

### Théorème 1 (*Inégalité triangulaire*)

Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

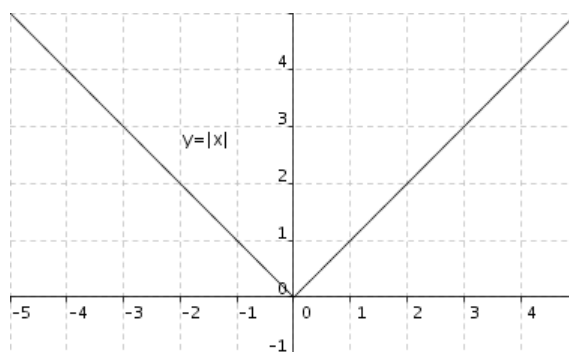


Figure 4 – Fonction valeur absolue



### Exercice 5

## 5 Fonction ln

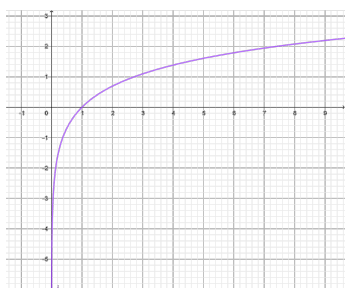
### Définition 10 (*Fonction logarithme Népérien*)

La fonction logarithme népérien, notée  $\ln$ , est l'unique fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  telle que

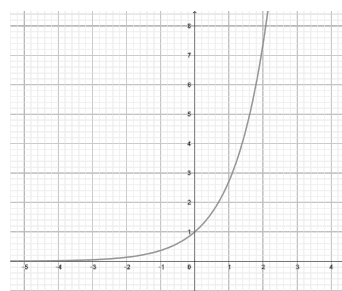
### Proposition 8 ()

Pour tous réels  $a > 0$  et  $b > 0$ , on a les règles de calculs suivantes

- |                                |  |  |
|--------------------------------|--|--|
| 1. $\ln(1) = 0$                | 3. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ | 5. $\ln(a^b) = b \ln(a)$                   |
| 2. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ | 4. $\ln(e) = 1$                                    | 6. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ |




Fonction ln



Fonction exp

## 6 Fonction exp


### Définition 11 (*Fonction exponentielle*)

 La fonction exponentielle est utilisée pour résoudre de nombreux problèmes allant de l'augmentation d'un capital à taux d'intérêt constant, à l'accroissement de la population d'un groupe d'individu en passant par la décroissance des éléments radioactifs dans un objet.

### Proposition 9 ()

Pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a les règles de calculs suivantes

- |                        |                                |                             |
|------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| 1. $e^0 = 1$           | 3. $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ | 5. $(e^a)^b = e^{ab}$       |
| 2. $e^{a+b} = e^a e^b$ | 4. $e^1 = e$                   | 6. $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ |

 **Remarque :** La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme Népérien. Cela signifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^x) = x, \quad \forall x > 0, \quad \exp(\ln(x)) = x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, \quad e^x = y \text{ si et seulement si } x = \ln(y)$$

## 7 Fonctions puissances


### Définition 12 (*Puissances entières*)

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , On définit les puissances d'un nombre  $y \in \mathbb{R}^*$  par

$$y^n = y \times y \dots \times y, \quad y^{-n} = \frac{1}{y \times y \dots \times y}, \quad y^0 = 1.$$

On définit également pour  $y \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y}.$$

 Les fonctions puissances généralisent les puissances entières et fractionnaires.

### Définition 13 (*Fonctions puissances*)

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , les fonctions puissances sont définies pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$  par  $x \rightarrow x^\alpha := e^{\alpha \ln(x)}$ .

### Proposition 10 ()

Pour tous nombres **rationnels** réels  $a$  et  $b$  et pour tous réels **positifs**  $x$  et  $y$ , on a

$$\begin{array}{lll} - (x^a)^b = x^{ab} & - x^a \times x^b = x^{a+b} & - x^a \times y^a = (xy)^a \\ - x^{-a} = \frac{1}{x^a} & - \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} & - \frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a \end{array}$$

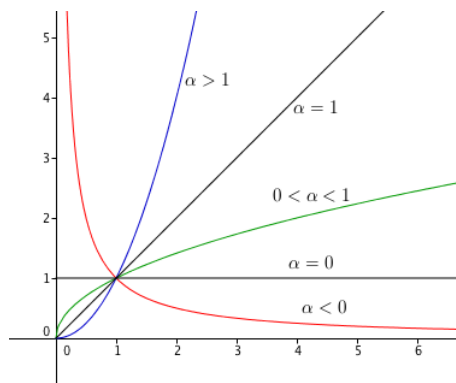


Figure 5 – Fonctions puissances

### Exercice 6

## 8 Fonction partie entière

### Définition 14 (*Fonction Partie entière*)

Soit  $x$  un nombre réel. On appelle partie entière de  $x$ , et on note  $E(x)$ ,  $[x]$  ou  $\lfloor x \rfloor$ , le plus grand nombre entier inférieur ou égal à  $x$ .

☞ **Remarque** : En Scilab, la fonction partie entière est donnée par la commande `floor`.

### Exemple 5 ()

$$\lfloor 4,12 \rfloor = 4, \quad \lfloor \pi \rfloor = 3, \quad \lfloor -2,4 \rfloor = -3$$

### Proposition 11 (*Propriétés de la partie entière*)

- $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x$ .
- $\forall x \in \mathbb{R}, x < \lfloor x \rfloor + 1$ .
- On a donc  $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ .
- On dit que la fonction partie entière est constante par morceaux.

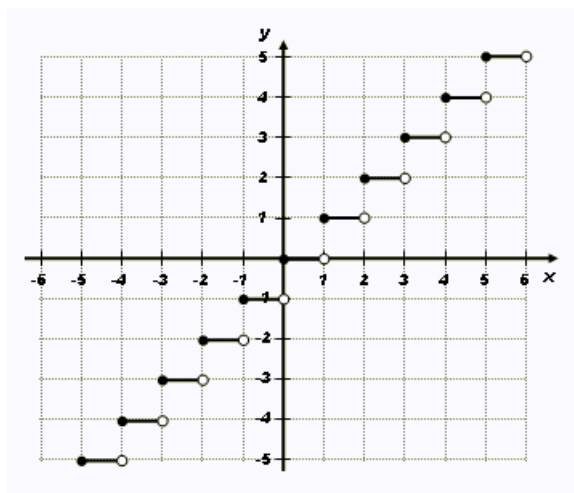


Figure 6 – Fonction partie entière

### Exercice 7

## 9 Déterminer un ensemble de définition

### Exemple 6 (*Rappel*)

Le domaine de définition de :

- $x \rightarrow \frac{1}{x}$  est  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- $x \rightarrow \sqrt{x}$  est  $[0, +\infty[ = \mathbb{R}_+$ .
- $x \rightarrow \ln(x)$  est  $]0, +\infty[ = \mathbb{R}_+^*$ .



### Trouver le domaine de définition d'une fonction

- Si il y a une fraction, on vérifie que le dénominateur ne s'annule pas.
- Si il y a une racine carrée, on vérifie que l'expression sous la racine carrée est positive.
- Si il y a une fonction logarithme ( $\ln$ ), on vérifie que l'expression dans le logarithme est strictement positive.



### Exercice 8