# Chapitre 9: Variable aléatoires sur des espaces de probabilités finies

M Leboucher

**Savoir Faire:**

- Déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète finie.
- Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire
- Reconnaitre une loi uniforme, de Bernoulli, Binomiale.

On récapitule dans le tableau suivant ce qu'on utilise en probabilités :

| | Expérience | Univers | Évènements | Loi de Proba | Proba |
|---|---|---|---|---|---|
| Définition | | | | | |
| Objet math. | | | | | |
| Notation(s) | | | | | |
| Exemple | | | | | |

# I - Variable aléatoire

*Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ?*

# I - Variable aléatoire

*Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ?*

**Exemple - Expérience n°1**

On lance deux dés à 6 faces. Quelle est la probabilité de faire 2 fois 6 ? De faire 1 seul fois 6 ?

# I - Variable aléatoire

*Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ?*

**Exemple - Expérience n°1**

On lance deux dés à 6 faces. Quelle est la probabilité de faire 2 fois 6 ? De faire 1 seul fois 6 ?

**Exemple - Expérience n°2**

On joue à un jeu. Chaque partie coute un euro. Le jeu consiste à lancer deux dés à 6 faces. Si l'on obtient un seul 6, on gagne 3 euros. Si l'on obtient deux 6, c'est le jackpot et on gagne 40 euros. Quelle est la probabilité de gagner 39 euros ? de gagner 2 euros ? de perdre ?

# I - Variable aléatoire

*Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ?*

**Exemple - Expérience n°1**

On lance deux dés à 6 faces. Quelle est la probabilité de faire 2 fois 6 ? De faire 1 seul fois 6 ?

**Exemple - Expérience n°2**

On joue à un jeu. Chaque partie coute un euro. Le jeu consiste à lancer deux dés à 6 faces. Si l'on obtient un seul 6, on gagne 3 euros. Si l'on obtient deux 6, c'est le jackpot et on gagne 40 euros. Quelle est la probabilité de gagner 39 euros ? de gagner 2 euros ? de perdre ?

**Définition : Variable aléatoire**

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. On appelle variable aléatoire sur $\Omega$ toute application $X$ de $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

*On lance $n$ fois un dé à 6 faces. Donnez des exemples de variable aléatoire associée à cette expérience.*

Avant toute étude d'une variable aléatoire, on cherchera son support :

**Définition : Support d'une VA**

$X(\Omega)$ est l'ensemble des réels possibles prises par la variable aléatoire $X$. $X(\Omega)$ est appelé le support de la variable aléatoire $X$.

Avant toute étude d'une variable aléatoire, on cherchera son support :

**Définition : Support d'une VA**

$X(\Omega)$ est l'ensemble des réels possibles prises par la variable aléatoire $X$. $X(\Omega)$ est appelé le support de la variable aléatoire $X$.

**Remarque :** Si on note $X(\Omega)=\{x_1,\ldots,x_n\}$, l'évènement $(X=x_i)$ est constitué des issues pour laquelle la variable aléatoire $X$ prend la valeur $x_i$. On trouvera les notations $(X\in I)$ avec $I\subset X(\Omega)$ ou plus fréquemment $(X\leq x_i)$.

*Exercice 1*

## *Tableau Bilan*

| | Variable Aléa | Support | Évènements | Probabilité |
|---|---|---|---|---|
| Définition | | | | |
| Objet math. | | | | |
| Notation(s) | | | | |
| Exemple | | | | |

*Que dire des $(X = i)$ pour tous les $i \in X(\Omega)$ ?*

*Que dire des $(X = i)$ pour tous les $i \in X(\Omega)$ ?*

## Propriété - Système complet associé à $X$

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $X$ une variable aléatoire sur $\Omega$. Alors les évènements $(X = i), i \in X(\Omega)$ forment un système complet d'évènement. On l'appelle système complet associé à $X$.

*Que dire des $(X = i)$ pour tous les $i \in X(\Omega)$ ?*

**Propriété - Système complet associé à $X$**

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $X$ une variable aléatoire sur $\Omega$. Alors les évènements $(X = i), i \in X(\Omega)$ forment un système complet d'évènement. On l'appelle système complet associé à $X$.

**Remarque :** Cela signifie que $\sum_{i \in X(\Omega)} P(X = i) = 1$

*Que dire des $(X = i)$ pour tous les $i \in X(\Omega)$ ?*

## Propriété - Système complet associé à $X$

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $X$ une variable aléatoire sur $\Omega$. Alors les évènements $(X = i), i \in X(\Omega)$ forment un système complet d'évènement. On l'appelle système complet associé à $X$.

**Remarque :** Cela signifie que $\sum_{i \in X(\Omega)} P(X = i) = 1$

## Définition : Loi de probabilité

Si on note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on appelle loi de probabilité de la variable aléatoire $X$, l'application qui à tout élément $x_i$ fait correspondre la probabilité de l'évènement $(X = x_i)$.

*Exercice 2*

# II - Paramètres d'une variable aléatoire

## 1) Espérance

*Comment calcule-t-on une moyenne ?*

# II - Paramètres d'une variable aléatoire

## 1) Espérance

*Comment calcule-t-on une moyenne ?*

**Définition : Espérance d'une variable aléatoire**

Soit $X$ une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. On appelle espérance mathématique de $X$ le nombre réel

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + \ldots + x_n \times P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

# II - Paramètres d'une variable aléatoire

## 1) Espérance

*Comment calcule-t-on une moyenne ?*

**Définition : Espérance d'une variable aléatoire**

Soit $X$ une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. On appelle espérance mathématique de $X$ le nombre réel

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + \ldots + x_n \times P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

**Remarque :** L'espérance est le pendant probabiliste de la moyenne en statistique.

*Exercice 3*

## Propriété - Bornes de l'espérance

Si $X(\Omega) \subset [p, q]$ alors $p \leq E(X) \leq q$.

**Remarque :** Notamment, si $X$ est positive, $E(X) \geq 0$

*Démonstration directe de la propriété*

## Propriété - Bornes de l'espérance

Si $X(\Omega) \subset [p, q]$ alors $p \leq E(X) \leq q$.

**Remarque :** Notamment, si $X$ est positive, $E(X) \geq 0$

*Démonstration directe de la propriété*

## Propriété - Linéarité de l'espérance

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et $a, b$ deux réels.

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

## 2) Formule de transfert

*Comment calculer* $E(X^2)$ *?*

## 2) Formule de transfert

*Comment calculer $E(X^2)$ ?*

**Théorème - Formule de transfert pour $X^2$**

Soit $X$ une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 P(X = x_i)$$

*Exercice 4*

# 3) Variance

*Quel est la variance d'une VA, l'écart type ?*

# 3) Variance

*Quel est la variance d'une VA, l'écart type ?*

## Définition : Variance

Soit $X$ une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On appelle **variance** de $X$ le nombre mesurant l'écart entre $X$ et son espérance

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2].$$

On appelle **écart-type** de $X$ le nombre

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}.$$

# 3) Variance

*Quel est la variance d'une VA, l'écart type ?*

## Définition : Variance

Soit $X$ une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On appelle **variance** de $X$ le nombre mesurant l'écart entre $X$ et son espérance

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2].$$

On appelle **écart-type** de $X$ le nombre

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}.$$

## Théorème - Formule de Koenig-Huygens

Soit $X$ une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. on a

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

*Démonstration directe de la formule et Exercice 5*

*Que dire de $Var(aX+b)$ ?*

*Que dire de $Var(aX+b)$ ?*

## Propriété -

Soit $X$ une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ admettant une variance. Alors, pour tous réels $a$ et $B$, on a

$$Var(aX+b) = a^2 Var(X).$$

*Démonstration de la propriété*

# III - Loi usuelle finie

## 1) Loi certaine

*Une urne contient n boules, indiscernables au toucher, de couleurs différentes et portant toutes le numéro 2 et on tire une boule. On note $X$ le numéro tiré.*

# III - Loi usuelle finie

## 1) Loi certaine

*Une urne contient n boules, indiscernables au toucher, de couleurs différentes et portant toutes le numéro 2 et on tire une boule. On note $X$ le numéro tiré.*

**Définition : Loi certaine**

On dit que la variable aléatoire $X$ suit la loi certaine si et seulement s'il existe un réel a tel que l'événement $(X = a)$ soit certain. Ainsi

$$X(\Omega) = \{a\} \text{ et } \quad P(X = a) = 1.$$

# III - Loi usuelle finie

## 1) Loi certaine

*Une urne contient n boules, indiscernables au toucher, de couleurs différentes et portant toutes le numéro 2 et on tire une boule. On note $X$ le numéro tiré.*

**Définition : Loi certaine**

On dit que la variable aléatoire $X$ suit la loi certaine si et seulement s'il existe un réel a tel que l'événement $(X = a)$ soit certain. Ainsi

$$X(\Omega) = \{a\} \text{ et } \quad P(X = a) = 1.$$

**Théorème - Espérance et Variance de la loi certaine**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $X$ une variable aléatoire suivant la loi certaine égale à $a$. Alors

$$E(X) = a \quad \text{et} \quad Var(X) = 0.$$

*Exercice 6*

# 2) Loi uniforme

*On lance un dé à 6 faces et on note $X$ la variable aléatoire associée au numéro de la face obtenue.*

## 2) Loi uniforme

*On lance un dé à 6 faces et on note $X$ la variable aléatoire associée au numéro de la face obtenue.*

**Définition : Loi uniforme**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que la variable aléatoire $X$ suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ si

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \text{ et } \quad \forall k \in [\![1, n]\!] P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$.

## 2) Loi uniforme

*On lance un dé à 6 faces et on note $X$ la variable aléatoire associée au numéro de la face obtenue.*

**Définition : Loi uniforme**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que la variable aléatoire $X$ suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ si

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \text{ et } \quad \forall k \in [\![1, n]\!] P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$.

**Théorème - Espérance et Variance de la loi uniforme**

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$. Alors

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} Var(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

*Exercice 7puis Exercice 8*

## 3) Loi de Bernoulli

*On lance une pièce truquée ayant pour probabilité $p \in ]0,1[$ de faire pile. On note $X$ la variable aléatoire valant 1 si on fait pile, 0 sinon.*

# 3) Loi de Bernoulli

*On lance une pièce truquée ayant pour probabilité $p \in ]0,1[$ de faire pile. On note $X$ la variable aléatoire valant 1 si on fait pile, 0 sinon.*

**Définition : Loi de Bernoulli**

Soit $p \in ]0,1[$. On dit que la variable aléatoire $X$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p$ si

$$X(\Omega) = \{0,1\} \text{ et } \quad P(X=1) = p, \quad P(X=0) = q = 1-p.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

# 3) Loi de Bernoulli

*On lance une pièce truquée ayant pour probabilité $p \in ]0,1[$ de faire pile. On note $X$ la variable aléatoire valant 1 si on fait pile, 0 sinon.*

**Définition : Loi de Bernoulli**

Soit $p \in ]0,1[$. On dit que la variable aléatoire $X$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p$ si

$$X(\Omega) = \{0,1\} \text{ et } \quad P(X=1) = p, \quad P(X=0) = q = 1-p.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

**Théorème - Espérance et Variance de la loi de Bernoulli**

Soit $p \in ]0,1[$ et $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$. Alors

$$E(X) = p \quad \text{et} Var(X) = pq = p(1-p).$$

*Exercice 9 puis Exercice 10*

## 4) Loi Binomiale

*On lance $n$ pièces truquées ayant pour probabilité $p \in ]0,1[$ de faire pile. On note $X$ la variable aléatoire comptant le nombre de pile.*

## 4) Loi Binomiale

*On lance $n$ pièces truquées ayant pour probabilité $p \in ]0,1[$ de faire pile. On note $X$ la variable aléatoire comptant le nombre de pile.*

### Définition : Loi Binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in ]0,1[$. On dit que la variable aléatoire $X$ suit la loi Binomiale de paramètre $(n,p)$ si

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \text{ et} \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

# 4) Loi Binomiale

*On lance $n$ pièces truquées ayant pour probabilité $p \in ]0,1[$ de faire pile. On note $X$ la variable aléatoire comptant le nombre de pile.*

**Définition : Loi Binomiale**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in ]0,1[$. On dit que la variable aléatoire $X$ suit la loi Binomiale de paramètre $(n,p)$ si

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \text{ et} \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

**Exemple - Fondamental**

On répète $n$ fois de manière indépendante une expérience ayant deux issues possibles : le succès de probabilité $p$, et l'échec de probabilité $1-p$. On parle d'expérience de Bernoulli. La variable aléatoire $X$ comptant le nombre de succès obtenus suit une loi binomiale de paramètre $(n,p)$.

**Remarque :** Il s'agit bien d'une loir de probabilité

*Exercice 11*

**Remarque :** Il s'agit bien d'une loir de probabilité

*Exercice 11*

**Remarque :** Dans le cas $n = 1$, on retrouve la loi de Bernoulli de paramètre $p$.

**Théorème - Espérance et Variance de la loi binomiale**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in ]0, 1[$ et $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$. Alors

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad Var(X) = npq = np(1-p).$$

*Démonstration de l'espérance de 2 manières et Exercice 12*