Chapitre 8:
Limites d'une fonction réelle

Savoir Faire:

- Calculer la limite d'une fonction (sans indétermination).
- Calculer la limite d'une fonction (avec indétermination)
- Déterminer une limite avec des inégalités

Intuitivement, on dit qu'une quantité dépendant d'un paramètre (par exemple le temps) admet une limite finie ℓ en un point a, si cette quantité « se rapproche de plus en plus de ℓ » lorsque le temps se rapproche de a. Il est possible de formuler de façon très précise l'expression « se rapproche de plus en plus de ».

Intuitivement, on dit qu'une quantité dépendant d'un paramètre (par exemple le temps) admet une limite finie ℓ en un point a, si cette quantité « se rapproche de plus en plus de ℓ » lorsque le temps se rapproche de a. Il est possible de formuler de façon très précise l'expression « se rapproche de plus en plus de ».

Ce fut le centre des travaux de 3 mathématiciens célèbres du XIX^e siècle : Cauchy (Français, 1789 - 1853), Bolzano (Empire d'Autriche, 1781-1848) et Weierstrass (Empire Allemand, 1815-1897). Ils s'attachèrent à donner une définition rigoureuse des limites.

Cauchy

Bolzano

Weierstrass

I - Limites à l'infini

1) Limite finie en l'infini

On dit que la fonction f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ ssi

I - Limites à l'infini

1) Limite finie en l'infini

On dit que la fonction f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ ssi

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \in D_f, \ \ x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

I - Limites à l'infini

1) Limite finie en l'infini

On dit que la fonction f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ ssi

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \in D_f,\ \ x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Définition : Limites finie en l'infini

On dit que la fonction f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$(aussi petit qu'on veut), la quantité $f(x) - \ell$ est comprise entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$ lorsque x est suffisamment grand. On note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

I - Limites à l'infini

1) Limite finie en l'infini

On dit que la fonction f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ ssi

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \in D_f,\ \ x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

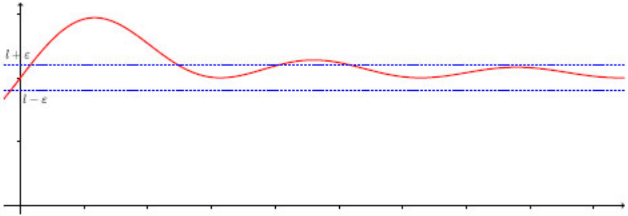
Définition : Limites finie en l'infini

On dit que la fonction f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$(aussi petit qu'on veut), la quantité $f(x) - \ell$ est comprise entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$ lorsque x est suffisamment grand. On note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

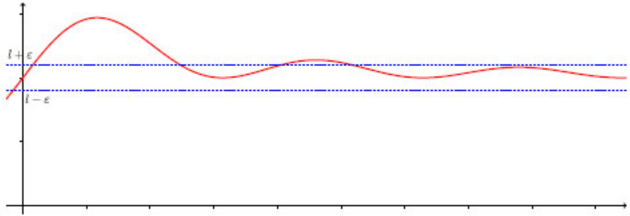
Exemple - Limite usuelle

Exercice 1



Exemple de limite finie en l'infini

Remarque : On définit de même la limite en $-\infty$.

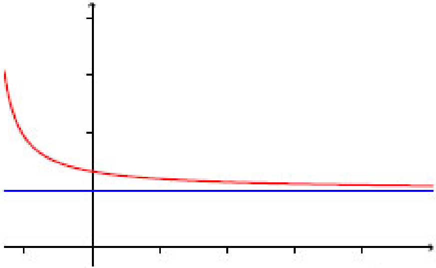


Exemple de limite finie en l'infini

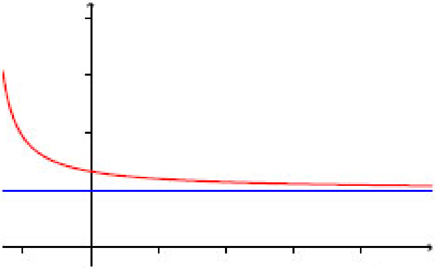
Remarque : On définit de même la limite en $-\infty$.

Définition : Asymptote horizontale

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (où $\ell \in \mathbb{R}$). Ainsi la droite d'équation $y = \ell$ est appelée asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (même chose en $-\infty$).



On dispose ici d'une asymptote horizontale d'équation $y = l$.



On dispose ici d'une asymptote horizontale d'équation $y = l$.

Pour étudier la position de la courbe de f par rapport à l'asymptote $y = \ell$, on étudie le signe de $f(x) - \ell$:

- Si $f(x) - \ell \geq 0$, la courbe est au-dessus de son asymptote.
- Si $f(x) - \ell \leq 0$, la courbe est en dessous de son asymptote.

Exercice 2

2) Limite infinie en l'infini

Définition : Limite infinie en l'infini

Si, pour tout nombre A (aussi grand qu'on veut), la fonction f est toujours supérieure ou égale à A dès que x est suffisamment grand, on dit que f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. On note

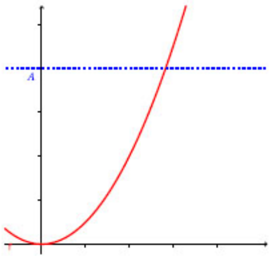
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Remarque : En langage mathématique on écrit donc

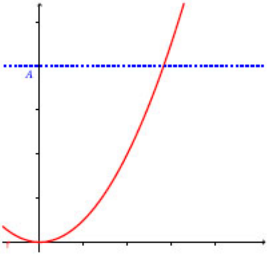
$$\forall A > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \geq M \implies f(x) \geq A$$

Exemple - Limite usuelle

Exercice 3



Exemple de limite infinie en l'infini



Exemple de limite infinie en l'infini

Remarque : On définit de même $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

II - Limites en un point

1) Limite finie en un point.

Définition : Limite finie en un point.

Soient x_0 et ℓ deux réels. Si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ dès lors que x est proche de x_0, on dit que f a pour limite ℓ quand x tend vers x_0. On note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

II - Limites en un point

1) Limite finie en un point.

Définition : Limite finie en un point.

Soient x_0 et ℓ deux réels. Si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ dès lors que x est proche de x_0, on dit que f a pour limite ℓ quand x tend vers x_0. On note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Remarque : En langage mathématique on écrit donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, |x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Exemple -

$$\lim_{x \to 2} 2x + 1 = \qquad \lim_{x \to 2} x^2 - 2x + 1 =$$

2) Limite infinie en un point.

Définition : Limite infinie en un point.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès lors que x est proche de x_0, on dit que f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers x_0. On note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

2) Limite infinie en un point.

Définition : Limite infinie en un point.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès lors que x est proche de x_0, on dit que f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers x_0. On note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Remarque : En langage mathématique on écrit donc

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, |x - x_0| < \alpha \implies f(x) > A.$$

Remarque : On définit de même $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Exemple -

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \qquad\qquad \lim_{x \to 0} \ln(e^{x^2} - 1) =$$

3) Limite à droite ou à gauche.

Définition : Limite à droite ou à gauche.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Si on s'intéresse à la limite en x_0, en imposant $x < x_0$, on parle de la limite à gauche en x_0, et on note $\lim\limits_{x \to x_0^-}$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}}$.
- Si on s'intéresse à la limite en x_0, en imposant $x > x_0$, on parle de la limite à droite en x_0, et on note $\lim\limits_{x \to x_0^+}$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}}$.

3) Limite à droite ou à gauche.

Définition : Limite à droite ou à gauche.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Si on s'intéresse à la limite en x_0, en imposant $x < x_0$, on parle de la limite à gauche en x_0, et on note $\lim\limits_{x \to x_0^-}$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}}$.
- Si on s'intéresse à la limite en x_0, en imposant $x > x_0$, on parle de la limite à droite en x_0, et on note $\lim\limits_{x \to x_0^+}$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}}$.

Propriété -

Soit f une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors f admet une limite en x_0 si et seulement si f admet des limites à gauche et à droite en x_0 et que ces limites sont les mêmes. Dans ce cas,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Exercice 4

Limites à droite ou à gauche.

On est souvent amené à étudier des limites à droite et à gauche lorsque

- La fonction n'est définie que sur un intervalle et on regarde la limite au bord de cet intervalle.
- La fonction est définie de deux manières différentes selon les intervalles.

Exercice 5

Limites à droite ou à gauche.

On est souvent amené à étudier des limites à droite et à gauche lorsque

- La fonction n'est définie que sur un intervalle et on regarde la limite au bord de cet intervalle.
- La fonction est définie de deux manières différentes selon les intervalles.

Exercice 5

Définition : Asymptote verticale

Si $\lim\limits_{x \to a^+ (\text{ou} a^-)} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe de f.

Dessin

III - Calculs de limites

1) Limites usuelles

Propriété - Fonctions usuelles

Fonctions	Limites à retenir
Puissances	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n est pair, $-\infty$ sinon
Inverse	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{1}{x} = -\infty$
Racine carrée	$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$
logarithme	$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$
exponentielle	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
Valeur absolue	$\lim\limits_{x\to+\infty} \lvert x\rvert = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \lvert x\rvert = +\infty$

Propriété - Fonctions puissances

- Pour tout $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^\alpha = 0$.
- Pour tout $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^\alpha = +\infty$.
- Pour tout $a > 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.
- Pour tout $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

Remarque : Toutes ces propriétés se retrouvent à partir de la formule de la puissance : $\alpha^\beta = e^{\beta \ln(\alpha)}$.

Exercice 6

2) Opérations sur les limites

Propriété - Limite de $f + g$

lim g / lim f	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

Exemple -

$$\lim_{x \to +\infty} x + \sqrt{x} = +\infty$$

Exercice 7

Propriété - Limite de $f \times g$

lim g / lim f	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell \times \ell'$	0	sgn$(\ell').\infty$	$-$sgn$(\ell').\infty$
0	0	0	FI	FI
$+\infty$	sgn$(\ell).\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-$sgn$(\ell).\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

Exemple -

$$\lim_{x \to +\infty} x \times \sqrt{x} = +\infty$$

Exercice 8

Propriété - Limite de $\dfrac{f}{g}$

lim g / lim f	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	sgn$(\ell').\infty$	$-$sgn$(\ell').\infty$
0^+	sgn$(\ell).\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$-$sgn$(\ell).\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	FI	FI
$-\infty$	0	0	FI	FI

Exemple -

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = 0 \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^2 + 1}{x} = +\infty$$

Exercice 9

3) Limite d'une fonction composée

Comment déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1}$ *?*

3) Limite d'une fonction composée

Comment déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1}$ *?*

Propriété - Limite de fonctions composées

Soient f , g ,h trois fonctions telles que $f(x) = g(h(x))$ sur un intervalle I. Soient a, b, c des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Si $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$ et $\lim\limits_{X \to b} g(X) = c$, alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

3) Limite d'une fonction composée

Comment déterminer $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - x + 1}$ *?*

Propriété - Limite de fonctions composées

Soient f , g ,h trois fonctions telles que $f(x) = g(h(x))$ sur un intervalle I. Soient a, b, c des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Si $\lim_{x\to a} h(x) = b$ et $\lim_{X\to b} g(X) = c$, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

Déterminer la limite de $f(x) = g(h(x))$ en x_0

1. On pose $X = h(x)$.
2. On détermine la limite b de $h(x)$ en x_0.
3. On détermine la limite c de $g(X)$ en b, et on conclut : la limite de f en x_0 vaut c.

Exemple précédent puis Exercice 10

4) Croissances comparées

Propriété - Croissances comparées

Pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^{\alpha}} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{(\ln(x))^{\beta}} = +\infty$$

4) Croissances comparées

Propriété - Croissances comparées

Pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^{\alpha}} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{(\ln(x))^{\beta}} = +\infty$$

Propriété - Conséquence

Par passage à l'inverse, on obtient

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^{\beta x}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0$$

Exercice 11

Propriété - Croissances comparées

Pour tout $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^{\alpha} \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

Preuve directe de la dernière propriété

Propriété - Croissances comparées

Pour tout $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^\alpha \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

Preuve directe de la dernière propriété

Remarque : On pourra retenir que l'exponentielle l'emporte sur les puissance qui l'emporte sur le logarithme.

Propriété - Croissances comparées

Pour tout $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^{\alpha} \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

Preuve directe de la dernière propriété

Remarque : On pourra retenir que l'exponentielle l'emporte sur les puissance qui l'emporte sur le logarithme.

Croissances comparées

Pour utiliser les croissances comparées, il faut souvent faire un changement de variable pour s'y ramener.

Exercice 12

IV - Lever les indéterminations

1) Cas $\infty - \infty$

Exemple -

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 - x \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} - x \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} x - e^x$$

IV - Lever les indéterminations

1) Cas $\infty - \infty$

Exemple -

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 - x \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} - x \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} x - e^x$$

Indétermination $\infty - \infty$

- Si c'est un polynôme, on factorise par le théorème de plus haut degré (on utilisera plus tard un théorème très pratique)
- S'il y a une racine carrée, on multiplie par la quantité conjuguée.
- Sinon, on force la factorisation par le terme qui semble converger le plus rapidement.

Détermination des exemples et Exercice 13

2) Cas $0 \times \infty$

Exemple -

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x^2 - 1)\ln(x-1) \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} x e^{x^3}$$

2) Cas $0 \times \infty$

Exemple -

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x^2 - 1)\ln(x-1) \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} x e^{x^3}$$

Indétermination $0 \times \infty$

- On fait un changement de variable afin de se ramener à une croissance comparée.

Détermination des exemples et Exercice 14

3) Cas $\frac{\infty}{\infty}$

Exemple -

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x+1} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln(x)} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+x^4}{e^{2x}-e^x+3}$$

3) Cas $\frac{\infty}{\infty}$

Exemple -

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x+1} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln(x)} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+x^4}{e^{2x}-e^x+3}$$

Indétermination $\frac{\infty}{\infty}$

- S'il s'agit d'une fraction rationnelle, on factorise le numérateur et le dénominateur par le terme de plus haut degré puis on simplifie (on aura également un théorème plus tard).
- On fait un changement de variable ou on fait des calculs pour faire apparaitre une croissance comparée
- Dans le cas général, on factorise au numérateur et au dénominateur par le terme qui croit le plus vite.

Détermination des exemples et Exercice 15

4) Cas $\frac{0}{0}$

Exemple -

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{(x-1)^2} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{(e^x-1)^2} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$$

4) Cas $\frac{0}{0}$

Exemple -

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{(x-1)^2} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{(e^x-1)^2} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$$

Indétermination $\frac{0}{0}$

- S'il s'agit d'une fraction rationnelle (ou assimilé)
  1. On cherche les racines du numérateur et du dénominateur.
  2. On factorise.
  3. On simplifie.
- Sinon, on regarde si c'est une limite connue.

4) Cas $\frac{0}{0}$

Exemple -

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{(x-1)^2} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{(e^x-1)^2} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$$

Indétermination $\frac{0}{0}$

- S'il s'agit d'une fraction rationnelle (ou assimilé)
  1. On cherche les racines du numérateur et du dénominateur.
  2. On factorise.
  3. On simplifie.
- Sinon, on regarde si c'est une limite connue.

Propriété - Taux d'accroissement

On a les limites suivantes

$$\lim_{x\to +0} \frac{e^x-1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Détermination des exemples et Exercice 16

V - Théorèmes de comparaison

1) Passage à la limite dans les inégalités

Propriété -

Soient f et g deux fonctions et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

- Si $f(x) \geqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell'$ avec $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$ alors $\ell \geqslant \ell'$
- Si $f(x) \geqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
- Si $f(x) \geqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

Remarque : L'opération de passage à la limite est compatible avec les inégalités larges mais pas aux inégalités strictes :

Contre exemple et Exercice 17

2) Limite par encadrement

Propriété - Théorème d'encadrement ou théorème des gendarmes

Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0 et $\ell \in \mathbb{R}$.
Si $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$ alors :
f admet une limite en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

2) Limite par encadrement

Propriété - Théorème d'encadrement ou théorème des gendarmes

Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0 et $\ell \in \mathbb{R}$.
Si $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$ alors :
f admet une limite en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Propriété - Corollaire

Soient f et g deux fonctions telles que $|f(x) - \ell| \leq g(x)$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Démonstration du corollaire et Exercice 18