Chapitre 7: Dénombrement

Savoir Faire:

- Calculer des probabilités à l'aide du dénombrement.
- Calculer avec des factorielles et des coefficients binomiaux

I - Loi uniforme

1) Cardinal d'un ensemble fini

Dénombrer un ensemble, c'est compter les éléments de cet ensemble. On trouve des traces de dénombrement dans l'antiquité. Mais c'est en étudiant les jeux de hasard et le calcul des probabilités que le dénombrement se développe avec des Français comme Pascal ou Pierre de Fermat.

I - Loi uniforme

1) Cardinal d'un ensemble fini

Dénombrer un ensemble, c'est compter les éléments de cet ensemble. On trouve des traces de dénombrement dans l'antiquité. Mais c'est en étudiant les jeux de hasard et le calcul des probabilités que le dénombrement se développe avec des Français comme Pascal ou Pierre de Fermat.

Définition : Cardinal d'un ensemble fini

- On dit que l'ensemble E est **fini** si le nombre de ses éléments est fini.
- Si le nombre de ses éléments est égal à un certain entier n, n est appelé **cardinal de** E noté **card(**E**)** ou $|E|$ ou encore $\#E$.

I - Loi uniforme

1) Cardinal d'un ensemble fini

Dénombrer un ensemble, c'est compter les éléments de cet ensemble. On trouve des traces de dénombrement dans l'antiquité. Mais c'est en étudiant les jeux de hasard et le calcul des probabilités que le dénombrement se développe avec des Français comme Pascal ou Pierre de Fermat.

Définition : Cardinal d'un ensemble fini

- On dit que l'ensemble E est **fini** si le nombre de ses éléments est fini.
- Si le nombre de ses éléments est égal à un certain entier n, n est appelé **cardinal de** E noté **card(**E**)** ou $|E|$ ou encore $\#E$.

Exemple - Cardinaux simples

$card([\![1,n]\!]) = \quad ,\qquad card(\emptyset) = \quad .$

$card([\![0,n]\!]) = \quad ,\qquad card([\![p,n]\!]) = \quad .$

Propriété -

Soit A un sous-ensemble fini de E. Alors A est un ensemble fini et on sait de plus que $card(A) \leq card(E)$. Dans ce cas là, on sait par ailleurs que

$$A = E \Longrightarrow \text{card}(A) = \text{card}(E).$$

Propriété -

Soit A un sous-ensemble fini de E. Alors A est un ensemble fini et on sait de plus que $card(A) \leq card(E)$. Dans ce cas là, on sait par ailleurs que

$$A = E \Longrightarrow \text{card}(A) = \text{card}(E).$$

Remarque : On peut avoir card(A) = card(E) avec $A \neq E$.

Donner deux ensembles ayant même cardinal mais qui sont différents

2) Loi de probabilité uniforme

2) Loi de probabilité uniforme

Définition : Loi uniforme

Dans le cas où tous les évènements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'ils sont équiprobables, ou que la loi de probabilité P est uniforme. Si $\Omega = \{x_1, \dots x_n\}$ alors la probabilité de chaque issue est

$$p = \frac{1}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{n}$$

Exemple - Dé à 6 faces

La probabilité de tomber sur n'importe quelle face est $\frac{1}{6}$.

2) Loi de probabilité uniforme

Définition : Loi uniforme

Dans le cas où tous les évènements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'ils sont équiprobables, ou que la loi de probabilité P est uniforme. Si $\Omega = \{x_1, \dots x_n\}$ alors la probabilité de chaque issue est

$$p = \frac{1}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{n}$$

Exemple - Dé à 6 faces

La probabilité de tomber sur n'importe quelle face est $\frac{1}{6}$.

Propriété - Formule d'équiprobabilité

Soit $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega),\ P)$ un espace probabilisé fini muni d'une loi uniforme, alors

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Exercice 1

3) Techniques de dénombrement générales

3) Techniques de dénombrement générales

Propriété - Cardinal d'une union disjointe

Soient A et B deux sous-ensembles disjoints d'un ensemble fini E. Alors $A \cup B$ est un ensemble fini et

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B)$$

Exercice 2

3) Techniques de dénombrement générales

Propriété - Cardinal d'une union disjointe

Soient A et B deux sous-ensembles disjoints d'un ensemble fini E. Alors $A \cup B$ est un ensemble fini et

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B)$$

Exercice 2

Propriété -

Soient A_1,A_2, . . . ,A_n n sous-ensembles de E deux à deux disjoints (∀(i, j)∈$\{1, ..., n\}^2$, $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$) alors

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{card}(A_i).$$

Exercice 3

Propriété - Crible de Poincaré

Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble fini E.

- $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.
- $|A \cup B \cup C| =$
  $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Exercice 4

Théorème -

Soit $A_1, \cdots, A_n$ une partition de E, alors pour tout $B \in \mathcal{P}(E)$,

$$\text{card}(B) = \sum_{i=1}^{n} \text{card}(B \cap A_i)$$

Théorème -

Soit $A_1, \cdots, A_n$ une partition de E, alors pour tout $B \in \mathcal{P}(E)$,

$$\text{card}(B) = \sum_{i=1}^{n} \text{card}(B \cap A_i)$$

Remarque : Dans le cas $n = 2$, la partition de E devient $A, \bar{A}$ et le résultat du théorème :

$$\text{card}(B) = \text{card}(B \cap A) + \text{card}(B \cap \bar{A})$$

Exercice 5

Théorème -

Soit $A_1, \cdots, A_n$ une partition de E, alors pour tout $B \in \mathcal{P}(E)$,

$$\text{card}(B) = \sum_{i=1}^{n} \text{card}(B \cap A_i)$$

Remarque : Dans le cas $n = 2$, la partition de E devient $A, \bar{A}$ et le résultat du théorème :

$$\text{card}(B) = \text{card}(B \cap A) + \text{card}(B \cap \bar{A})$$

Exercice 5

Propriété - Cardinal du complémentaire

Soit A un sous-ensemble d'un ensemble fini E, alors :

$$\text{card}\left(\overline{A}\right) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$$

Exercice 6

II - Méthodes de dénombrement

1) Utilisation d'un problème jouet

II - Méthodes de dénombrement

1) Utilisation d'un problème jouet

Problème jouet

Dans toute la suite du cours, on va considérer l'expérience suivante. Dans un paquet, il y a n cartes numérotées de 1 à n. On tire alors p cartes de différentes façons :

1. En s'intéressant ou non à l'ordre des cartes tirées.
2. Avec/Sans remise des cartes une fois tirées.

II - Méthodes de dénombrement

1) Utilisation d'un problème jouet

Problème jouet

Dans toute la suite du cours, on va considérer l'expérience suivante. Dans un paquet, il y a n cartes numérotées de 1 à n. On tire alors p cartes de différentes façons :

1. En s'intéressant ou non à l'ordre des cartes tirées.
2. Avec/Sans remise des cartes une fois tirées.

On complétera alors le tableau suivant

p cartes tirées sur n	Avec ordre	Sans ordre
Avec Remise		
Sans remise		

2) Tirage avec ordre et remise

Définition : p-listes

Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier non nul.On appelle **p-liste** d'éléments choisis parmi les n éléments de E tout élément de E^p c'est à dire tout p-uplet de la forme $(e_1,\ e_2, ...,\ e_p)$

Exercice 7

2) Tirage avec ordre et remise

Définition : p-listes

Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier non nul.On appelle **p-liste** d'éléments choisis parmi les n éléments de E tout élément de E^p c'est à dire tout p-uplet de la forme $(e_1,\ e_2, ...,\ e_p)$

Exercice 7

Propriété - Cardinal du produit cartésien - Choix successifs.

Soient A et B deux ensembles finis. Le cardinal du produit cartésien $A \times B$ est :

$$Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$$

Plus généralement, si $A_1, ..., A_n$ désignent n ensembles finis, alors :

$$Card(A_1 \times ... \times A_n) = Card(A_1) \times .... \times Card(A_n)$$

Exercice 8

Remarque : L'ordre des éléments figurant dans la p-liste est important. Ainsi deux p-listes contenant les mêmes éléments dans des ordres différents sont différentes. Ex : $(2,3,4) \neq (3,2,4)$.

Remarque : L'ordre des éléments figurant dans la p-liste est important. Ainsi deux p-listes contenant les mêmes éléments dans des ordres différents sont différentes. Ex : $(2,3,4) \neq (3,2,4)$.

Remarque : Une p-liste peut contenir plusieurs fois le même élément. Ex : $(2,3,1,2)$.

Remarque : L'ordre des éléments figurant dans la p-liste est important. Ainsi deux p-listes contenant les mêmes éléments dans des ordres différents sont différentes. Ex : $(2,3,4) \neq (3,2,4)$.

Remarque : Une p-liste peut contenir plusieurs fois le même élément. Ex : $(2,3,1,2)$.

Théorème - Nombre de p-listes

Si E est un ensemble de cardinal n alors le nombre de p-listes d'éléments de E est égal n^p.

Remarque : L'ordre des éléments figurant dans la p-liste est important. Ainsi deux p-listes contenant les mêmes éléments dans des ordres différents sont différentes. Ex : $(2,3,4) \neq (3,2,4)$.

Remarque : Une p-liste peut contenir plusieurs fois le même élément. Ex : $(2,3,1,2)$.

Théorème - Nombre de p-listes

Si E est un ensemble de cardinal n alors le nombre de p-listes d'éléments de E est égal n^p.

p cartes tirées sur n	Avec ordre	Sans ordre
Avec Remise	p-listes : n^p	
Sans remise		

Exercice 9

3) Tirage avec ordre et sans remise

3) Tirage avec ordre et sans remise

Définition : Permutations

On considère un ensemble E de cardinal n. Une **permutation de** E est un réarrangement des éléments de E. C'est à dire l'écriture des éléments de E dans un ordre différent.

3) Tirage avec ordre et sans remise

Définition : Permutations

On considère un ensemble E de cardinal n. Une **permutation de** E est un réarrangement des éléments de E. C'est à dire l'écriture des éléments de E dans un ordre différent.

Exemple - Permutations

Soit $E = \{a, b, c\}$. Les triplets (a, b, c), (a, c, b) (b, c, a) sont des permutations de E.

3) Tirage avec ordre et sans remise

Définition : Permutations

On considère un ensemble E de cardinal n. Une **permutation de** E est un réarrangement des éléments de E. C'est à dire l'écriture des éléments de E dans un ordre différent.

Exemple - Permutations

Soit $E = \{a, b, c\}$. Les triplets (a, b, c), (a, c, b) (b, c, a) sont des permutations de E.

Théorème - Permutations

Soit E un ensemble de cardinal n. Le nombre de permutations de E est égal à n ! .

Exercice 10

Définition : Arrangements

On appelle **arrangement de p éléments de E** une p-liste d'éléments **distincts** de E.

Définition : Arrangements

On appelle **arrangement de p éléments de E** une p-liste d'éléments **distincts** de E.

Remarque : Dans ce cas, on a $0 \leq p \leq n$. On ne peut pas tirer plus de boules qu'il n'y en a.

Définition : Arrangements

On appelle **arrangement de p éléments de E** une p-liste d'éléments **distincts** de E.

Remarque : Dans ce cas, on a $0 \leq p \leq n$. On ne peut pas tirer plus de boules qu'il n'y en a.

Théorème - Nombres d'arrangements

Soit E est un ensemble de cardinal n. Le nombre d'arrangements de p éléments de E $(p \leq n)$ est égal à :

$$n(n-1)...(n-p+1) = \prod_{k=0}^{p-1}(n-k) = \frac{n!}{(n-p)!} = A_n^p \ .$$

Définition : Arrangements

On appelle **arrangement de p éléments de E** une p-liste d'éléments **distincts** de E.

Remarque : Dans ce cas, on a $0 \leq p \leq n$. On ne peut pas tirer plus de boules qu'il n'y en a.

Théorème - Nombres d'arrangements

Soit E est un ensemble de cardinal n. Le nombre d'arrangements de p éléments de E $(p \leq n)$ est égal à :

$$n(n-1)...(n-p+1) = \prod_{k=0}^{p-1}(n-k) = \frac{n!}{(n-p)!} = A_n^p \ .$$

p boules tirées sur n	Avec ordre	Sans ordre
Avec Remise	p-listes : n^p	
Sans remise	Arrangements : A_n^p	

Exercice 11

4) Tirage sans ordre et sans remise

4) Tirage sans ordre et sans remise

Définition : Combinaisons

Soit E un ensemble de cardinal n. On appelle **combinaison de p éléments de E** toute partie à p éléments de E.

4) Tirage sans ordre et sans remise

Définition : Combinaisons

Soit E un ensemble de cardinal n. On appelle **combinaison de p éléments de E** toute partie à p éléments de E.

Exemple - Combinaisons

Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$. Les ensembles $\{a, b, c\}$, $\{e, c, b\}$ et $\{a\}$ sont des combinaisons de E.

4) Tirage sans ordre et sans remise

Définition : Combinaisons

Soit E un ensemble de cardinal n. On appelle **combinaison de p éléments de E** toute partie à p éléments de E.

Exemple - Combinaisons

Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$. Les ensembles $\{a, b, c\}$, $\{e, c, b\}$ et $\{a\}$ sont des combinaisons de E.

Remarque : Les éléments d'une combinaison de p éléments de E sont deux à deux distincts donc $0 \leq p \leq card(E)$.

4) Tirage sans ordre et sans remise

Définition : Combinaisons

Soit E un ensemble de cardinal n. On appelle **combinaison de p éléments de E** toute partie à p éléments de E.

Exemple - Combinaisons

Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$. Les ensembles $\{a, b, c\}$, $\{e, c, b\}$ et $\{a\}$ sont des combinaisons de E.

Remarque : Les éléments d'une combinaison de p éléments de E sont deux à deux distincts donc 0$\leq p \leq card(E)$.

Remarque : Puisque l'on considère des parties, L'ordre des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance : c'est ce qui différencie une combinaison d'un arrangement.

Déterminer le nombres de combinaisons possibles.

Théorème - Nombre de combinaisons

Soit E est un ensemble de cardinal n. Le nombre de combinaison de p éléments de E $(p \leq n)$ est :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Ces nombres sont appelés "coefficients binomiaux".

Théorème - Nombre de combinaisons

Soit E est un ensemble de cardinal n. Le nombre de combinaison de p éléments de E $(p \leq n)$ est :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Ces nombres sont appelés "coefficients binomiaux".

Théorème - Combinaisons avec répétitions (pas au programme)

Soit E est un ensemble de cardinal n. Le nombre de combinaisons avec répétitions de p éléments de E, noté Γ_n^p est égal à

$$\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!},$$

Théorème - Nombre de combinaisons

Soit E est un ensemble de cardinal n. Le nombre de combinaison de p éléments de E $(p \leq n)$ est :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Ces nombres sont appelés "coefficients binomiaux".

Théorème - Combinaisons avec répétitions (pas au programme)

Soit E est un ensemble de cardinal n. Le nombre de combinaisons avec répétitions de p éléments de E, noté Γ_n^p est égal à

$$\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!},$$

p boules tirées/n	Avec ordre	Sans ordre
Avec Remise	p-listes : n^p	Combinaisons : Γ_n^p
Sans remise	Arrangements : A_n^p	Combinaisons : $C_n^p = \binom{n}{p}$

Exercice 12

5) Propriétés des coefficients binomiaux.

Propriété - Calculs avec les coefficients binomiaux

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall$p $\in \{1, ..., n\}$, on a :

1. $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1.$

5) Propriétés des coefficients binomiaux.

Propriété - Calculs avec les coefficients binomiaux

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall$p $\in \{1, ..., n\}$, on a :

1. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$

$\forall n \in \mathbb{N}^\star$ et $\forall$p $\in \{1, ..., n-1\}$, on a :

1. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
2. $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$

Preuve directe de la propriété et Exercice 13

5) Propriétés des coefficients binomiaux.

Propriété - Calculs avec les coefficients binomiaux

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall$p $\in \{1, \ldots, n\}$, on a :

❶ $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ ❷ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$

$\forall n \in \mathbb{N}^\star$ et $\forall$p $\in \{1, \ldots, n-1\}$, on a :

❶ $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ ❷ $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$

Preuve directe de la propriété et Exercice 13

Propriété - Triangle de Pascal

Pour tout n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Théorème - Formule du binôme de Newton

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Théorème - Formule du binôme de Newton

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n-k}.$$

Exemple - Exercice

- Développez $(x+2)^2$, $(x+3)^3$
- Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$.

Exercice 14

Théorème - Formule du binôme de Newton

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple - Exercice

- Développez $(x+2)^2$, $(x+3)^3$
- Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$.

Exercice 14

Théorème - Cardinal des parties d'un ensemble

Si E est un ensemble à n éléments alors $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Pour la démonstration, voir l'exercice 19