Chapitre 6: Sommes et Produits, Applications

Savoir Faire:

- Calculer une somme.
- Manipuler une inégalité mettant en jeu une somme.
- Utiliser la formule des probabilités totales.
- Déterminer l'indépendance d'évènements.
- Calculer la puissance d'une matrice.

I - Utilisation des symboles Σ et Π.

1) Sommes et produits finis

I - Utilisation des symboles Σ et Π.

1) Sommes et produits finis

Définition : Ensemble d'entiers

Soient n et p deux entiers tels que $p < n$. On note $[\![p;n]\!] = \{p; p+1; \ldots ; n\}$ l'ensemble des entiers de p jusqu'à n.

I - Utilisation des symboles Σ et Π.

1) Sommes et produits finis

Définition : Ensemble d'entiers

Soient n et p deux entiers tels que $p < n$. On note $[\![p;n]\!] = \{p; p+1; \dots; n\}$ l'ensemble des entiers de p jusqu'à n.

Remarque : Il y a n entiers dans $[\![1;n]\!]$ et $n+1$ entiers dans $[\![0;n]\!]$. Il y a $n-p+1$ entiers dans $[\![p;n]\!]$.

I - Utilisation des symboles Σ et Π.

1) Sommes et produits finis

Définition : Ensemble d'entiers

Soient n et p deux entiers tels que $p < n$. On note $[\![p;n]\!] = \{p; p+1; \ldots; n\}$ l'ensemble des entiers de p jusqu'à n.

Remarque : Il y a n entiers dans $[\![1;n]\!]$ et $n+1$ entiers dans $[\![0;n]\!]$. Il y a $n-p+1$ entiers dans $[\![p;n]\!]$.

Définition : Somme

Soient $a_p, \ldots, a_n$ des réels avec $p \leq n$. On note

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + \ldots + a_n$$

et on lit "somme de $k = p$ à n des a_k".

Écrire explicitement les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} \frac{k}{k+1} =$
2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{6} (k+2) =$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} (2k-1) =$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 - k^2 =$

Écrire explicitement les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} \frac{k}{k+1} =$
2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{6} (k+2) =$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} (2k-1) =$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 - k^2 =$

Écrire sous forme de somme les quantités suivantes en déterminant le terme général u_n de la somme :

1. $1+2+3+4+5+6 =$
2. $1+4+9+16+25 =$
3. $-1+4-9+16+\ldots+u_n =$
4. $1+e+e^2+e^3+\ldots+u_n =$

Remarque : On se servira souvent de ce type de calcul :

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1}$$

Remarque : On se servira souvent de ce type de calcul :

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1}$$

Exemple -

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = \sum_{k=1}^{4} k^2 + 5^2, \qquad \sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

Remarque : On se servira souvent de ce type de calcul :

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1}$$

Exemple -

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = \sum_{k=1}^{4} k^2 + 5^2, \qquad \sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

Définition : Produit

Soient n et p deux entiers tels que $p < n$. On note de la même façon,

$$\prod_{k=p}^{n} a_k = a_p \times \ldots \times a_n$$

et on lit "produit de $k = p$ à n des a_k".

Écrire explicitement les produits suivantes :

1. $\displaystyle\prod_{k=0}^{5} \frac{k}{k+1} =$
2. $\displaystyle\prod_{k=2}^{6} (k+2) =$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{4} (2k-1) =$

Définition : Factorielle

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle factorielle de n et on note $n!$ le nombre

$$0! = 1, \qquad n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \ldots \times n.$$

Définition : Factorielle

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle factorielle de n et on note $n!$ le nombre

$$0! = 1, \qquad n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \ldots \times n.$$

Exemple - Factorielle

$1! = 1 \qquad 2! = 1 \times 2 = 2 \qquad 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

$10! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 9 \times 10 = 3\,628\,800$

Définition : Factorielle

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle factorielle de n et on note $n!$ le nombre

$$0! = 1, \qquad n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \ldots \times n.$$

Exemple - Factorielle

$1! = 1 \qquad 2! = 1 \times 2 = 2 \qquad 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

$10! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 9 \times 10 = 3\,628\,800$

Propriété -

Pour tout entier n, on a

$$(n+1)! = n! \times (n+1)$$

Preuve directe de la propriété

2) Propriétés des sommes et produits

Propriété - Sommes

Soient u et v deux suites réelles et $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m+1 \leq n$, alors :

2) Propriétés des sommes et produits

Propriété - Sommes

Soient u et v deux suites réelles et $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m+1 \leq n$, alors :

1. Relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{m} u_k + \sum_{k=m+1}^{n} u_k$$

2) Propriétés des sommes et produits

Propriété - Sommes

Soient u et v deux suites réelles et $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m+1 \leq n$, alors :

1. Relation de Chasles :
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{m} u_k + \sum_{k=m+1}^{n} u_k$$
2. Linéarité de la somme : Pour tout λ réel
$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} v_k$$

2) Propriétés des sommes et produits

Propriété - Sommes

Soient u et v deux suites réelles et $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m+1 \leq n$, alors :

1. Relation de Chasles :
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{m} u_k + \sum_{k=m+1}^{n} u_k$$
2. Linéarité de la somme : Pour tout λ réel
$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} v_k$$
3. Pour tout λ réel,
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda = n\lambda.$$

Preuves des propriétés par raisonnement direct

Propriété - Produit

Soient u et v deux suites réelles et $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m + 1 \leq n$, alors :

Propriété - Produit

Soient u et v deux suites réelles et $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m+1 \leq n$, alors :

1. $$\prod_{k=1}^{n} u_k = \prod_{k=1}^{m} u_k \times \prod_{k=m+1}^{n} u_k.$$

Propriété - Produit

Soient u et v deux suites réelles et $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m+1 \leq n$, alors :

1. $$\prod_{k=1}^{n} u_k = \prod_{k=1}^{m} u_k \times \prod_{k=m+1}^{n} u_k.$$
2. Pour tout λ réel
$$\prod_{k=1}^{n} (\lambda u_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} u_k$$

Propriété - Produit

Soient u et v deux suites réelles et $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m+1 \leq n$, alors :

1. $$\prod_{k=1}^{n} u_k = \prod_{k=1}^{m} u_k \times \prod_{k=m+1}^{n} u_k.$$
2. Pour tout λ réel
$$\prod_{k=1}^{n} (\lambda u_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} u_k$$
3. $$\prod_{k=1}^{n} (u_k \times v_k) = \prod_{k=1}^{n} u_k \times \prod_{k=1}^{n} v_k.$$

Preuve des propriétés par raisonnement direct

Rappel :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \qquad \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Rappel :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \qquad \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Propriété - Exponentielle et logarithme

- Pour tous réels $a_p, \dots, a_n$, on a

$$\exp\left(\sum_{k=p}^{n} a_k\right) = \prod_{k=p}^{n} e^{a_k}$$

- Pour tous réels $a_p > 0, \dots, a_n > 0$, on a

$$\ln\left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right) = \sum_{k=p}^{n} \ln(a_k)$$

Preuve par récurrence.

3) Sommes usuelles

Propriété - Sommes usuelles

Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, $n \geq p$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a les formules suivantes.

3) Sommes usuelles

Propriété - Sommes usuelles

Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, $n \geq p$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a les formules suivantes.

- $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1$

3) Sommes usuelles

Propriété - Sommes usuelles

Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, $n \geq p$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a les formules suivantes.

- $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\qquad \displaystyle\sum_{k=p}^{n} k = \frac{(n-p+1)(n+p)}{2}$

3) Sommes usuelles

Propriété - Sommes usuelles

Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, $n \geq p$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a les formules suivantes.

- $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} k = \frac{(n-p+1)(n+p)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) Sommes usuelles

Propriété - Sommes usuelles

Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, $n \geq p$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a les formules suivantes.

- $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\qquad \displaystyle\sum_{k=p}^{n} k = \frac{(n-p+1)(n+p)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3) Sommes usuelles

Propriété - Sommes usuelles

Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, $n \geq p$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a les formules suivantes.

- $$\sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1$$
- $$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=p}^{n} k = \frac{(n-p+1)(n+p)}{2}$$
- $$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
- $$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$
- $$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \qquad \sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$$

II - Techniques de calculs de Somme

1) Par récurrence

Preuve par récurrence

Si l'on connait le résultat d'une somme, on peut montrer ce résultat par récurrence.

Exercice 1

2) En utilisant les propriétés sur les sommes

En ajoutant ou retranchant un terme

On peut parfois retrouver une somme connue en ajoutant ou retranchant des termes à la somme. C'est à dire en utilisant la formule :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k - u_0$$

Exercice 2

En factorisant

Quand un terme dans la somme ne dépend pas de la variable k utilisée, on peut la mettre en facteur (c'est-à-dire le sortir de la somme)

Exercice 3

En factorisant

Quand un terme dans la somme ne dépend pas de la variable k utilisée, on peut la mettre en facteur (c'est-à-dire le sortir de la somme)

Exercice 3

En développant

On peut utiliser la formule

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Exercice 4

3) Changement d'indice

Remarque : Lorsqu'on écrit $\sum_{k=p}^{n} a_k$, la variable k est appelée **variable muette** : on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre non utilisée :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{j=p}^{n} a_j = \sum_{l=p}^{n} a_l$$

3) Changement d'indice

Remarque : Lorsqu'on écrit $\sum_{k=p}^{n} a_k$, la variable k est appelée **variable muette** : on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre non utilisée :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{j=p}^{n} a_j = \sum_{l=p}^{n} a_l$$

Propriété - Changement d'indice

Si a, m *et* p sont des entiers naturels avec $p \leq m$, on a :

$$\sum_{k=p}^{m} u_k = \sum_{k=p+a}^{m+a} u_{k-a}$$

Exercice 5

4) Sommes télescopiques

4) Sommes télescopiques

Définition : Sommes télescopique

Soit (u_k) une suite de réels, p et n deux entiers tels que $p \leq n$. On appelle somme télescopique une somme de la forme

$$\sum_{k=p}^{n} u_{k+1} - u_k$$

4) Sommes télescopiques

Définition : Sommes télescopique

Soit (u_k) une suite de réels, p et n deux entiers tels que $p \leq n$. On appelle somme télescopique une somme de la forme

$$\sum_{k=p}^{n} u_{k+1} - u_k$$

Propriété - Sommes et produits télescopiques

- $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_p$
- $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{v_{n+1}}{v_p}.$

Preuve directe de la propriété.

Exercice 6

5) Le binôme de Newton

Définition : Coefficients binomiaux

Soit k, n deux entiers avec $k \leq n$. On appelle coefficients binomiaux, les nombres

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

5) Le binôme de Newton

Définition : Coefficients binomiaux

Soit k, n deux entiers avec $k \leq n$. On appelle coefficients binomiaux, les nombres

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Théorème - Formule du binôme de Newton

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exercice 7

6) Inégalité et sommes

Propriété - Inégalité

Soient p, n deux entiers tels que $p \leq n$. On considère deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant pour tout $k \in [\![p; n]\!]$,

$$u_k \leq v_k$$

On a alors :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k \leq \sum_{k=p}^{n} v_k$$

Exercice 8

III - Applications aux probabilités et aux matrices

1) Union disjointe

Propriété -

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout famille d'évènements $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux à deux incompatibles,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Démonstration de la propriété par récurrence

III - Applications aux probabilités et aux matrices

1) Union disjointe

Propriété -

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout famille d'évènements $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux à deux incompatibles,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Démonstration de la propriété par récurrence

Remarque : Si les $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ forment un système complet d'évènements

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(\Omega) = 1.$$

Exercice 9

2) Formule des probabilités totales

Théorème - Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega),\ P)$ un espace probabilisé fini et $n \in \mathbb{N}$. Soit $(A_1, \ldots A_n)$ un système complet d'évènements de Ω de probabilité non nulle. Alors on a

$$\forall B \in \mathscr{P}(\Omega), \quad P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B)$$

Exercice 10

3) Indépendance d'une famille d'évènements

Définition : Indépendance d'une famille d'évènements

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}$ et A_1, ..., A_n sont n évènements.

3) Indépendance d'une famille d'évènements

Définition : Indépendance d'une famille d'évènements

Soit $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega),\ P)$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}$ et A_1, ..., A_n sont n évènements.

- On dit que A_1, ..., A_n sont deux à deux indépendants si :

$$\forall (i,\ j) \in [\![1, n]\!]^2\ ,\ i \neq j,\ P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$

3) Indépendance d'une famille d'évènements

Définition : Indépendance d'une famille d'évènements

Soit $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega),\ P)$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}$ et A_1, ..., A_n sont n évènements.

- On dit que A_1, ..., A_n sont deux à deux indépendants si :
$$\forall (i,\ j) \in [\![1, n]\!]^2\ ,\ i \neq j,\ P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$
- On dit que A_1, ..., A_n sont mutuellement indépendants si :
$$\forall I \subset [\![1, n]\!],\ P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

3) Indépendance d'une famille d'évènements

Définition : Indépendance d'une famille d'évènements

Soit $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega),\ P)$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}$ et A_1, ..., A_n sont n évènements.

- On dit que A_1, ..., A_n sont deux à deux indépendants si :
$$\forall (i,\ j) \in [\![1, n]\!]^2\ ,\ i \neq j,\ P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$
- On dit que A_1, ..., A_n sont mutuellement indépendants si :
$$\forall I \subset [\![1, n]\!],\ P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Propriété -

Soient A_1, ..., A_n n évènements mutuellement indépendants pour la probabilité P. Si l'on pose $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$ alors les évènements $B_1, ..., B_n$ sont mutuellement indépendants pour la probabilité P.

Exercice 11

Théorème - Binôme de Newton

Soient A, B deux matrices carrées commutatives (i.e., $AB = BA$). On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Remarque : En pratique, la matrice A ou B aura une puissance facile à calculer pour simplifier les calculs

Exercice 12