

Chapitre 5: Matrices

M Lebourcher

A large grid of numbers, likely representing a matrix, displayed in a dark green color on a black background. The numbers are arranged in approximately 20 rows and 50 columns, forming a dense pattern of digits.



Savoir Faire:

- Additionner ou multiplier des matrices
- Calculer la puissance d'une matrice carrée
- Inverser une matrice
- Manipuler la transposée d'une matrice

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2



En mathématique, les matrices sont des tableaux de nombres permettant d'interpréter les résultats d'algèbre linéaire. Toutes les disciplines étudiant les phénomènes linéaires utilisent les matrices. Et quand on a un problème non linéaire, on donne souvent des approximations linéaires !

Matrices quelconques

- Définition des matrices
- Matrices particulières
- Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

- Addition
- Multiplication par un réel
- Propriétés d'espace vectoriel
- Multiplication de matrices

Matrices carrées

- Définition des matrices carrées
- Matrices symétriques
- Matrices diagonales et triangulaires
- Puissance de matrice

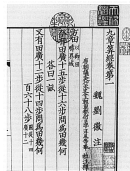
Matrices inversibles

- Définition
- Propriétés
- Règles de calculs
- Cas particulier des matrices 2×2



En mathématique, les matrices sont des tableaux de nombres permettant d'interpréter les résultats d'algèbre linéaire. Toutes les disciplines étudiant les phénomène linéaires utilisent les matrices. Et quand on a un problème non linéaire, on donne souvent des approximations linéaires !

Bien que le calcul matriciel moderne n'apparaisse qu'au début du XIX^e siècle, on utilise depuis longtemps des tableaux de nombres pour résoudre les systèmes d'équations. Un des premier exemple vient d'un texte chinois du II^e siècle avant JC : "Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique".



Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

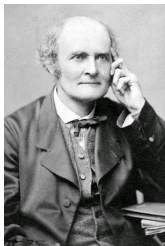
Propriétés

Règles de calculs

Cas particuliers des matrices 2×2 

En mathématique, les matrices sont des tableaux de nombres permettant d'interpréter les résultats d'algèbre linéaire. Toutes les disciplines étudiant les phénomènes linéaires utilisent les matrices. Et quand on a un problème non linéaire, on donne souvent des approximations linéaires!

Bien que le calcul matriciel moderne n'apparaisse qu'au début du XIX^e siècle, on utilise depuis longtemps des tableaux de nombres pour résoudre les systèmes d'équations. Un des premiers exemples vient d'un texte chinois du II^e siècle avant JC : "Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique".



En 1545, Cardano fait connaître cette méthode en Europe. De son côté le mathématicien japonais Seki Kôwa utilise les mêmes techniques pour résoudre des systèmes en 1683. En 1854, Arthur Cayley publie un traité sur les transformations géométriques utilisant les matrices de façon beaucoup plus générale que tout ce qui a été fait avant lui. Il définit les opérations usuelles du calcul matriciel et montre ses propriétés.



I - Matrices quelconques

1) Définition des matrices

Définition : Matrices

Soient n et p sont deux entiers naturels non nuls.

- On appelle **matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{R}** un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes de nombres réels.
- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{R} est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

I - Matrices quelconques

1) Définition des matrices

Définition : Matrices

Soient n et p sont deux entiers naturels non nuls.

- On appelle **matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{R}** un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes de nombres réels.
- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{R} est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Notations : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Le nombre réel situé à l'intersection de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne se note $a_{i,j}$. Ce sont les coefficients de la matrice A et on écrit :



Écriture de la matrice

I - Matrices quelconques

1) Définition des matrices

Définition : Matrices

Soient n et p sont deux entiers naturels non nuls.

- On appelle **matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{R}** un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes de nombres réels.
- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{R} est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Notations : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Le nombre réel situé à l'intersection de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne se note $a_{i,j}$. Ce sont les coefficients de la matrice A et on écrit :



Écriture de la matrice

ou $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ ou encore $A = (a_{i,j})$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemple - Matrices

$$\bullet A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -4/5 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & -8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

$$\bullet B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & -4/5 & 3 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & -8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$$

Exemple - Matrices

$$\bullet A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -4/5 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & -8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

$$\bullet B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & -4/5 & 3 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & -8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$$



Remarque :

Deux matrices $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq k}}$ sont égales si et seulement si elles ont le même nombre de lignes, le même nombre de colonnes et les mêmes coefficients.



Exercice 1

2) Matrices particulières

Définition : Des matrices particulières

- Une matrice dont tous les coefficients sont nuls s'appelle une **matrice nulle** notée $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$ ou 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté.

2) Matrices particulières

Définition : Des matrices particulières

- Une matrice dont tous les coefficients sont nuls s'appelle une **matrice nulle** notée $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$ ou 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté.
- Une **matrice carrée** est une matrice qui a le même nombre de lignes et de colonnes. L'ensemble des matrices carrées ayant pour nombre de lignes et de colonnes n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Matrices particulières

Définition : Des matrices particulières

- Une matrice dont tous les coefficients sont nuls s'appelle une **matrice nulle** notée $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$ ou 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté.
- Une **matrice carrée** est une matrice qui a le même nombre de lignes et de colonnes. L'ensemble des matrices carrées ayant pour nombre de lignes et de colonnes n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Une **matrice colonne** est une matrice formée d'une seule colonne. On parle aussi de vecteur.
Une matrice colonne à n lignes est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2) Matrices particulières

Définition : Des matrices particulières

- Une matrice dont tous les coefficients sont nuls s'appelle une **matrice nulle** notée $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$ ou 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté.
- Une **matrice carrée** est une matrice qui a le même nombre de lignes et de colonnes. L'ensemble des matrices carrées ayant pour nombre de lignes et de colonnes n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Une **matrice colonne** est une matrice formée d'une seule colonne. On parle aussi de vecteur. Une matrice colonne à n lignes est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Une **matrice ligne** est une matrice formée d'une seule ligne. On parle aussi de vecteur. Une matrice ligne à p colonnes est un élément de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.



Donnez des exemples de matrices particulières

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2

3) Transposée d'une matrice



Comment faire pour passer d'un vecteur ligne à un vecteur colonne ?

3) Transposée d'une matrice



Comment faire pour passer d'un vecteur ligne à un vecteur colonne ?

Définition : Matrice transposée

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle **transposée de A** l'élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, noté tA , défini par :

$${}^tA = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{où} \quad c_{i,j} = a_{j,i}, \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

3) Transposée d'une matrice



Comment faire pour passer d'un vecteur ligne à un vecteur colonne ?

Définition : Matrice transposée

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle **transposée de A** l'élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, noté tA , défini par :

$${}^tA = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{où} \quad c_{i,j} = a_{j,i}, \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$



Remarque : La transposée de A est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A .



Exercice 2

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2

II - Opérations sur les matrices

1) Addition



Comment additionner deux matrices ?

II - Opérations sur les matrices

1) Addition



Comment additionner deux matrices ?

Définition : Addition de matrice

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On appelle **somme de A et B** l'élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, noté $A + B$, défini par $A + B = (c_{i,j})$ où

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket.$$

II - Opérations sur les matrices

1) Addition



Comment additionner deux matrices ?

Définition : Addition de matrice

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On appelle **somme de A et B** l'élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, noté $A + B$, défini par $A + B = (c_{i,j})$ où

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket.$$



Remarque : La somme de deux matrices de taille différente n'est pas définie.

II - Opérations sur les matrices

1) Addition



Comment additionner deux matrices ?

Définition : Addition de matrice

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On appelle **somme de A et B** l'élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, noté $A + B$, défini par $A + B = (c_{i,j})$ où

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket.$$



Remarque : La somme de deux matrices de taille différente n'est pas définie.



Remarque : L'addition matricielle est commutative ($A + B = B + A$).

Exemple -

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2

2) Multiplication par un réel

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.



Que vaut $2 \times A$?

2) Multiplication par un réel

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.



Que vaut $2 \times A$?

Définition : Multiplication par un réel

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un réel. Alors $\lambda A = (c_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ avec

$$c_{i,j} = \lambda a_{i,j}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket.$$

2) Multiplication par un réel

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.



Que vaut $2 \times A$?

Définition : Multiplication par un réel

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un réel. Alors $\lambda A = (c_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ avec

$$c_{i,j} = \lambda a_{i,j}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket.$$

Exemple -

$$2 \times A = 2 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} =$$



Exercice 3

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2

3) Propriétés d'espace vectoriel



En reprenant l'exercice précédent, faites $9A + 9B$. Que remarque-t-on ?

3) Propriétés d'espace vectoriel



En reprenant l'exercice précédent, faites $9A + 9B$. Que remarque-t-on ?

Propriété -

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ, μ deux nombres réels.

- $A + B = B + A$ (commutativité de l'addition)
- $0 + A = A + 0 = A$ (0 est l'élément neutre de l'addition)
- $A + (-A) = -A + A = 0$ ($-A$ est l'opposée de la matrice A)
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, $\lambda(\mu A) = \lambda\mu A$ (distributivités)

3) Propriétés d'espace vectoriel



En reprenant l'exercice précédent, faites $9A + 9B$. Que remarque-t-on ?

Propriété -

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ, μ deux nombres réels.

- $A + B = B + A$ (commutativité de l'addition)
- $0 + A = A + 0 = A$ (0 est l'élément neutre de l'addition)
- $A + (-A) = -A + A = 0$ ($-A$ est l'opposée de la matrice A)
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, $\lambda(\mu A) = \lambda\mu A$ (distributivités)



Remarque : Les propriétés précédentes font de l'ensemble $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +, \times)$ un espace vectoriel. On verra cela dans un chapitre ultérieur.

4) Multiplication de matrices



Multiplication de 2 vecteurs

Matrices quelconques

- Définition des matrices
- Matrices particulières
- Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

- Addition
- Multiplication par un réel
- Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

- Définition des matrices carrées
- Matrices symétriques
- Matrices diagonales et triangulaires
- Puissance de matrice

Matrices inversibles

- Définition
- Propriétés
- Règles de calculs
- Cas particulier des matrices 2×2

4) Multiplication de matrices*Multiplication de 2 vecteurs***Définition : Multiplications de matrices**

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On définit alors $C = A \times B = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ avec pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket,$

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,n}b_{n,j}$$

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2

4) Multiplication de matrices*Multiplication de 2 vecteurs***Définition : Multiplications de matrices**

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On définit alors $C = A \times B = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ avec pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket,$

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,n}b_{n,j}$$



Remarque : Le produit n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2

4) Multiplication de matrices



Multiplication de 2 vecteurs

Définition : Multiplications de matrices

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On définit alors $C = A \times B = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ avec pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket,$

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,n}b_{n,j}$$



Remarque : Le produit n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Propriété -

Soient A, B et C trois matrices compatibles pour les multiplications considérées et λ un réel.

- $ABC = A \times B \times C = (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- $\lambda AB = (\lambda A) \times B = A \times (\lambda B) = \lambda(A \times B)$
- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ et $C \times (A + B) = C \times A + C \times B$



Exercice 4

III - Matrices carrées

1) Définition des matrices carrées

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2

III - Matrices carrées

1) Définition des matrices carrées

Définition : Matrices carrées

Une matrice carrée d'ordre n est une matrice à n lignes et à n colonnes. On notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n .

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2

III - Matrices carrées

1) Définition des matrices carrées

Définition : Matrices carrées

Une matrice carrée d'ordre n est une matrice à n lignes et à n colonnes. On notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n .

Exemple - Matrice carrée

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3.



Comment définir la diagonale d'une matrice carrée ?

III - Matrices carrées

1) Définition des matrices carrées

Définition : Matrices carrées

Une matrice carrée d'ordre n est une matrice à n lignes et à n colonnes. On notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n .

Exemple - Matrice carrée

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3.



Comment définir la diagonale d'une matrice carrée ?

Définition : Diagonale

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors on appelle diagonale de A les coefficients $(a_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$.



Diagonale dans l'exemple précédent ?

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2

2) Matrices symétriques



Qu'est ce qu'une matrice symétrique ?

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2

2) Matrices symétriques



Qu'est ce qu'une matrice symétrique ?

Définition : Matrice symétrique

Soit A une matrice carrée d'ordre n . A est symétrique ssi ${}^tA = A$.

2) Matrices symétriques



Qu'est ce qu'une matrice symétrique ?

Définition : Matrice symétrique

Soit A une matrice carrée d'ordre n . A est symétrique ssi ${}^t A = A$.



Remarque : Cela revient à dire que $\forall 1 \leq i, j \leq n, a_{i,j} = a_{j,i}$.

2) Matrices symétriques



Qu'est ce qu'une matrice symétrique ?

Définition : Matrice symétrique

Soit A une matrice carrée d'ordre n . A est symétrique ssi ${}^t A = A$.



Remarque : Cela revient à dire que $\forall 1 \leq i, j \leq n, a_{i,j} = a_{j,i}$.



Remarque : On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées symétrique d'ordre n .



Donner des exemples de matrices symétriques

3) Matrices diagonales et triangulaires

Définition : Matrices diagonales et triangulaires

- Une **matrice diagonale** d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n où tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement ceux de la diagonale :



Dessin d'une matrice diagonale

3) Matrices diagonales et triangulaires

Définition : Matrices diagonales et triangulaires

- Une **matrice diagonale** d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n où tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement ceux de la diagonale :



Dessin d'une matrice diagonale

- Une **matrice triangulaire supérieure** (resp. **triangulaire inférieure**) est une matrice carrée dont tous les coefficients situés en dessous (resp. au dessus) de la diagonale sont nuls. C'est à dire, $A = (a_{i,j})$ est une matrice triangulaire supérieure ssi $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i > j$ (resp. $i < j$) $\Rightarrow a_{i,j} = 0$.



Dessin d'une matrice triangulaire supérieure



Ecrire des matrices diagonales et triangulaires d'ordre 3.

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



On calcule AI_3 et I_3A . Que remarque-t-on ?

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



On calcule AI_3 et I_3A . Que remarque-t-on ?

Définition : Matrice identité

La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ notée I_n est la matrice diagonale avec des 1 sur la diagonale :



dessin de I_n

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



On calcule AI_3 et I_3A . Que remarque-t-on ?

Définition : Matrice identité

La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ notée I_n est la matrice diagonale avec des 1 sur la diagonale :



dessin de I_n



Remarque : La matrice identité I_n est neutre pour la multiplication : quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$AI_n = I_nA = A.$$

4) Puissance de matrice



Comment pourrait-on définir les puissances de matrice ?

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2

4) Puissance de matrice

Comment pourrait-on définir les puissances de matrice ?

Définition : Puissance de matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée non nulle . Alors

$$A^0 = I_n \text{ et si } k \in \mathbb{N}^*, A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ fois}}.$$

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2

4) Puissance de matrice



Comment pourrait-on définir les puissances de matrice ?

Définition : Puissance de matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée non nulle . Alors

$$A^0 = I_n \text{ et si } k \in \mathbb{N}^*, A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ fois}}.$$

Propriété -

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, k et l deux entiers positifs. On a :

$$A^k \times A^l = A^{k+l}$$



Que peut-on dire de $(AB)^k$?

4) Puissance de matrice



Comment pourrait-on définir les puissances de matrice ?

Définition : Puissance de matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée non nulle . Alors

$$A^0 = I_n \text{ et si } k \in \mathbb{N}^*, A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ fois}}.$$

Propriété -

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, k et l deux entiers positifs. On a :

$$A^k \times A^l = A^{k+l}$$



Que peut-on dire de $(AB)^k$?



Remarque : En revanche, en général $(AB)^k \neq A^k B^k$;



Exercice 5

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2



Que peut-on dire des puissances d'une matrice diagonale ?

Matrices quelconques

- Définition des matrices
- Matrices particulières
- Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

- Addition
- Multiplication par un réel
- Propriétés d'espace vectoriel
- Multiplication de matrices

Matrices carrées

- Définition des matrices carrées
- Matrices symétriques
- Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

- Définition
- Propriétés
- Règles de calculs
- Cas particulier des matrices 2×2



Que peut-on dire des puissances d'une matrice diagonale ?

Propriété -

Si A est une matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}$

alors $\forall m \geq 0, A^m = \begin{pmatrix} a_1^m & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n^m \end{pmatrix}$

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particuliers des matrices 2×2 

Que peut-on dire des puissances d'une matrice diagonale ?

Propriété -

Si A est une matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}$

alors $\forall m \geq 0, A^m = \begin{pmatrix} a_1^m & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n^m \end{pmatrix}$

Exemple -

Pour tout $m \geq 0, I_n^m = I_n$.



Exercice 6

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2



Puissance de matrice (1ère méthode)

Si l'on a une matrice A et que l'on connaît la formule pour A^n , on peut montrer le résultat par récurrence.



Exercice 7

IV - Matrices inversibles

1) Définition



Quel est l'inverse d'un nombre réel ?

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2

IV - Matrices inversibles

1) Définition



Quel est l'inverse d'un nombre réel ?

Définition : Matrices inversibles

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est **inversible** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

La matrice B est alors appelée **inverse de** A et est notée A^{-1} .

IV - Matrices inversibles

1) Définition



Quel est l'inverse d'un nombre réel ?

Définition : Matrices inversibles

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est **inversible** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

La matrice B est alors appelée **inverse de** A et est notée A^{-1} .

- L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $GL_n(\mathbb{R})$.

IV - Matrices inversibles

1) Définition



Quel est l'inverse d'un nombre réel ?

Définition : Matrices inversibles

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est **inversible** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

La matrice B est alors appelée **inverse de** A et est notée A^{-1} .

- L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $GL_n(\mathbb{R})$.



Remarque : La matrice I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

IV - Matrices inversibles

1) Définition



Quel est l'inverse d'un nombre réel ?

Définition : Matrices inversibles

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est **inversible** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

La matrice B est alors appelée **inverse de** A et est notée A^{-1} .

- L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $GL_n(\mathbb{R})$.



Remarque : La matrice I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

Exemple - Matrice inversible

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$



Exercice 8

2) Propriétés

Matrices quelconques

- Définition des matrices
- Matrices particulières
- Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

- Addition
- Multiplication par un réel
- Propriétés d'espace vectoriel
- Multiplication de matrices

Matrices carrées

- Définition des matrices carrées
- Matrices symétriques
- Matrices diagonales et triangulaires
- Puissance de matrice

Matrices inversibles

- Définition
- Propriétés**
- Règles de calculs
- Cas particulier des matrices 2×2

Propriété -

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.

2) Propriétés

Propriété -

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors $(A^{-1})^p = (A^p)^{-1}$.

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2

2) Propriétés

Propriété -

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors $(A^{-1})^p = (A^p)^{-1}$.
- Si A et B sont dans $GL_n(\mathbb{R})$ alors $A \times B \in GL_n(\mathbb{R})$ et

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}.$$



Démonstration directe de la dernière propriété.

2) Propriétés

Propriété -

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors $(A^{-1})^p = (A^p)^{-1}$.
- Si A et B sont dans $GL_n(\mathbb{R})$ alors $A \times B \in GL_n(\mathbb{R})$ et

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}.$$



Démonstration directe de la dernière propriété.

Propriété -

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle. S'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AB = 0_n$ alors A n'est pas inversible.



Démonstration par l'absurde de la dernière propriété.

3) Règles de calculs

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2

3) Règles de calculs

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2

Propriété -

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C \in GL_n(\mathbb{R})$ Alors

$$AC = B \iff A = BC^{-1} \quad CA = B \iff C^{-1}B$$

$$AC = BC \iff A = B \quad CA = CB \iff A = B.$$

3) Règles de calculs

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2

Propriété -

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C \in GL_n(\mathbb{R})$ Alors

$$AC = B \iff A = BC^{-1} \quad CA = B \iff C^{-1}B$$

$$AC = BC \iff A = B \quad CA = CB \iff A = B.$$



Remarque : Cela n'est valable que si C est inversible

3) Règles de calculs

Propriété -

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C \in GL_n(\mathbb{R})$ Alors

$$AC = B \iff A = BC^{-1} \quad CA = B \iff C^{-1}B$$

$$AC = BC \iff A = B \quad CA = CB \iff A = B.$$



Remarque : Cela n'est valable que si C est inversible

Propriété -

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$ alors A est inversible, d'inverse B .
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_n$ alors A est inversible, d'inverse B .

3) Règles de calculs

Propriété -

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C \in GL_n(\mathbb{R})$ Alors

$$AC = B \iff A = BC^{-1} \quad CA = B \iff C^{-1}B$$

$$AC = BC \iff A = B \quad CA = CB \iff A = B.$$



Remarque : Cela n'est valable que si C est inversible

Propriété -

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$ alors A est inversible, d'inverse B .
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_n$ alors A est inversible, d'inverse B .



Montrer qu'une matrice est inversible.

Pour montrer qu'une matrice A est inversible, on peut chercher une matrice B telle que $AB = I_n$. On pourra conclure que A est inversible, et que $A^{-1} = B$ (Exercice 9)

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2

4) Cas particulier des matrices 2×2

4) Cas particulier des matrices 2×2

Propriété - Cas particulier des matrices 2×2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
 Dans ce cas-la :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$



Remarque : Le nombre $ad - bc$ est appelé déterminant de A .



Démonstration directe de la propriété



Exercice 10

Matrices quelconques

Définition des matrices

Matrices particulières

Transposée d'une matrice

Opérations sur les matrices

Addition

Multiplication par un réel

Propriétés d'espace vectoriel

Multiplication de matrices

Matrices carrées

Définition des matrices carrées

Matrices symétriques

Matrices diagonales et triangulaires

Puissance de matrice

Matrices inversibles

Définition

Propriétés

Règles de calculs

Cas particulier des matrices 2×2



Puissance de matrice (2ème méthode)

Soit A une matrice carrée. Si on parvient à écrire $A = PDP^{-1}$ où P est une matrice inversible et D est une matrice diagonale. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^n P^{-1}$$



Démonstration par récurrence de la formule puis Exercice 11.