Chapitre 4:
Probabilités finies

Savoir Faire:

- Exprimer des évènements en fonction d'intersection, d'union et du complémentaire.
- Déterminer la probabilité d'une union finie.
- Déterminer une probabilité conditionnelle.
- Déterminer la probabilité d'une intersection finie.
- Utiliser la formule des probabilités totales.

À l'origine, le terme probabilité vient du latin *probabilitas* qui désigne l'opposé du concept de certitude. Dans les traductions d'Aristote, le terme probabilité ne désigne pas une quantification mais une idée communément admise.

À l'origine, le terme probabilité vient du latin *probabilitas* qui désigne l'opposé du concept de certitude. Dans les traductions d'Aristote, le terme probabilité ne désigne pas une quantification mais une idée communément admise. L'apparition de la notion de "risque" n'est apparue qu'au XII^e siècle pour l'évaluation de contrats commerciaux et elle s'est développée au XVI^e siècle avec les contrats d'assurance maritime.

À l'origine, le terme probabilité vient du latin *probabilitas* qui désigne l'opposé du concept de certitude. Dans les traductions d'Aristote, le terme probabilité ne désigne pas une quantification mais une idée communément admise. L'apparition de la notion de "risque" n'est apparue qu'au XII^e siècle pour l'évaluation de contrats commerciaux et elle s'est développée au XVI^e siècle avec les contrats d'assurance maritime.

Le véritable début de la théorie des probabilités en mathématiques a lieu au $XVII^e$ et $XVIII^e$ siècle grâce aux travaux de Pascal, Fermat, Newton, Bernoulli, Cramer... Le calcul des probabilités reste alors une discipline en marge des mathématiques.

À l'origine, le terme probabilité vient du latin *probabilitas* qui désigne l'opposé du concept de certitude. Dans les traductions d'Aristote, le terme probabilité ne désigne pas une quantification mais une idée communément admise. L'apparition de la notion de "risque" n'est apparue qu'au XII^e siècle pour l'évaluation de contrats commerciaux et elle s'est développée au XVI^e siècle avec les contrats d'assurance maritime.

Le véritable début de la théorie des probabilités en mathématiques a lieu au $XVII^e$ et $XVIII^e$ siècle grâce aux travaux de Pascal, Fermat, Newton, Bernoulli, Cramer... Le calcul des probabilités reste alors une discipline en marge des mathématiques.

Ce n'est qu'au XX^e siècle avec Kolmogorov (1903 - 1987) que commence la théorie des probabilités comme branche des mathématiques.

I - Vocabulaire

1) Expérience aléatoire

I - Vocabulaire

1) Expérience aléatoire

Définition : Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience où l'on connait les résultats possibles (ou issues) mais on ne sait pas à l'avance lequel va arriver.

I - Vocabulaire

1) Expérience aléatoire

Définition : Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience où l'on connait les résultats possibles (ou issues) mais on ne sait pas à l'avance lequel va arriver.

Définition : Univers

L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé univers de cette expérience et est souvent noté Ω.

I - Vocabulaire

1) Expérience aléatoire

Définition : Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience où l'on connait les résultats possibles (ou issues) mais on ne sait pas à l'avance lequel va arriver.

Définition : Univers

L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé univers de cette expérience et est souvent noté Ω.

Exemple - Dé à 6 faces

On lance un dé à 6 faces et on note le numéro de la face supérieur. C'est une expérience aléatoire qui a pour univers

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Exemples d'expérience aléatoire et d'univers classique

Expériences aléatoires	Univers
On lance 1 pièce	
On lance deux pièces de monnaies successivement	
On lance deux dés à 6 faces simultanément	
On tire une carte d'un jeu de 52 cartes et on regarde la couleur	
On tire successivement 2 boules d'une urne avec 4 boules noires et 2 boules blanches	
On étudie la durée de vie d'une télévision choisie au hasard dans une usine	

2) Événements

2) Événements

Définition : Évènements

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω

- Un **évènement** est constitué d'une ou plusieurs issues de l'expérience aléatoire. C'est une partie de l'univers Ω c'est à dire un élément de $\mathscr{P}(\Omega)$.

2) Événements

Définition : Évènements

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω

- Un **évènement** est constitué d'une ou plusieurs issues de l'expérience aléatoire. C'est une partie de l'univers Ω c'est à dire un élément de $\mathscr{P}(\Omega)$.
- Un évènement est dit **élémentaire** s'il est constitué d'une seule issue.

2) Événements

Définition : Évènements

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω

- Un **évènement** est constitué d'une ou plusieurs issues de l'expérience aléatoire. C'est une partie de l'univers Ω c'est à dire un élément de $\mathscr{P}(\Omega)$.
- Un évènement est dit **élémentaire** s'il est constitué d'une seule issue.
- Ω est un évènement, appelé **évènement certain**

2) Événements

Définition : Évènements

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω

- Un **évènement** est constitué d'une ou plusieurs issues de l'expérience aléatoire. C'est une partie de l'univers Ω c'est à dire un élément de $\mathscr{P}(\Omega)$.
- Un évènement est dit **élémentaire** s'il est constitué d'une seule issue.
- Ω est un évènement, appelé **évènement certain**
- $\emptyset$ est un évènement, appelé **évènement impossible**

2) Événements

Définition : Évènements

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω

- Un **évènement** est constitué d'une ou plusieurs issues de l'expérience aléatoire. C'est une partie de l'univers Ω c'est à dire un élément de $\mathscr{P}(\Omega)$.
- Un évènement est dit **élémentaire** s'il est constitué d'une seule issue.
- Ω est un évènement, appelé **évènement certain**
- $\emptyset$ est un évènement, appelé **évènement impossible**

Exemple - Dé à 6 faces

- "Obtenir un nombre pair" est l'évènement ....
- "Obtenir 2" est un évènement ....
- "Obtenir un nombre $\geq$ 7" est un évènement ....
- "Obtenir un diviseur de 60" est un évènement ....

3) Opérations sur les évènements

3) Opérations sur les évènements

Définition : Opérations d'évènements

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. A et B sont deux évènements

- L'évènement **contraire** de A , noté $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

3) Opérations sur les évènements

Définition : Opérations d'évènements

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. A et B sont deux évènements

- L'évènement **contraire** de A , noté $\overline{A} = \Omega \setminus A$.
- L'évènement $A \cup B$ est l'évènement constitué des issues présentes dans A **ou** dans B.

3) Opérations sur les évènements

Définition : Opérations d'évènements

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. A et B sont deux évènements

- L'évènement **contraire** de A , noté $\overline{A} = \Omega \setminus A$.
- L'évènement $A \cup B$ est l'évènement constitué des issues présentes dans A **ou** dans B.
- L'évènement $A \cap B$ est l'évènement constitué des issues communes à A **et** à B

3) Opérations sur les évènements

Définition : Opérations d'évènements

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. A et B sont deux évènements

- L'évènement **contraire** de A , noté $\overline{A} = \Omega \setminus A$.
- L'évènement $A \cup B$ est l'évènement constitué des issues présentes dans A **ou** dans B.
- L'évènement $A \cap B$ est l'évènement constitué des issues communes à A **et** à B
- Si $A \subset B$.L'évènement $B \setminus A$ est l'évènement constitué des issues de B qui ne sont pas dans A.

3) Opérations sur les évènements

Définition : Opérations d'évènements

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. A et B sont deux évènements

- L'évènement **contraire** de A , noté $\overline{A} = \Omega \setminus A$.
- L'évènement $A \cup B$ est l'évènement constitué des issues présentes dans A **ou** dans B.
- L'évènement $A \cap B$ est l'évènement constitué des issues communes à A **et** à B
- Si $A \subset B$.L'évènement $B \setminus A$ est l'évènement constitué des issues de B qui ne sont pas dans A.

Remarque : Les notations sont les mêmes que pour la théorie des ensembles.

Exercice 1

Définition : Évènements incompatibles

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. Deux évènements A et B sont dits **incompatibles** s'ils n'ont pas d'issues communes. On note alors $A \cap B = \emptyset$.

Définition : Évènements incompatibles

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. Deux évènements A et B sont dits **incompatibles** s'ils n'ont pas d'issues communes. On note alors $A \cap B = \emptyset$.

Remarque : Si A est un évènement, alors A et $\overline{A}$ sont toujours incompatibles.

Définition : Évènements incompatibles

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. Deux évènements A et B sont dits **incompatibles** s'ils n'ont pas d'issues communes. On note alors $A \cap B = \emptyset$.

Remarque : Si A est un évènement, alors A et $\overline{A}$ sont toujours incompatibles.

Remarque : Deux évènements élémentaires différents sont toujours incompatible.

Définition : Évènements incompatibles

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω. Deux évènements A et B sont dits **incompatibles** s'ils n'ont pas d'issues communes. On note alors $A \cap B = \emptyset$.

Remarque : Si A est un évènement, alors A et $\overline{A}$ sont toujours incompatibles.

Remarque : Deux évènements élémentaires différents sont toujours incompatible.

Exemple - Dé à 6 faces

$A = \{$obtenir un chiffre pair$\}$ et $\bar{A} = \{$obtenir un chiffre impair$\}$ sont incompatibles.

On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. Dites lesquels de ces évènements sont incompatibles entre eux. A = "On tire un trèfle". B = "On tire une figure ". C = "On tire un carreau". D = "On tire un nombre entre 2 et 8"

Définition : Système complet d'évènements

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω fini. On appelle **système complet d'évènements** une partition $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ de Ω :

Définition : Système complet d'évènements

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω fini. On appelle **système complet d'évènements** une partition $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ de Ω :

1. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

Définition : Système complet d'évènements

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω fini. On appelle **système complet d'évènements** une partition $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de Ω :

1. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.
2. Pour tout $1 \leq i < j \leq n$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$ (Les évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont 2 à 2 incompatibles)

Définition : Système complet d'évènements

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω fini. On appelle **système complet d'évènements** une partition $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ de Ω :

1. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.
2. Pour tout $1 \leq i < j \leq n$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$ (Les évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont 2 à 2 incompatibles)

Remarque : Pour tout évènement A de Ω , la famille d'évènements $(A, \overline{A})$ est un système complet d'évènements de Ω

Proposer des systèmes complets d'évènements de l'univers $\Omega = [\![1;6]\!]$.

II - Espaces probabilisés finis

Un même univers peut correspondre a deux expériences aléatoires différentes. Par exemple, lancer un dé équilibré et lancer un dé truqué correspondent à l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ce qui les différencie, ce sont les probabilités des différents évènements (ou la loi de probabilité) que l'on définit pour chaque expérience.

1) Loi de probabilité

II - Espaces probabilisés finis

Un même univers peut correspondre a deux expériences aléatoires différentes. Par exemple, lancer un dé équilibré et lancer un dé truqué correspondent à l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ce qui les différencie, ce sont les probabilités des différents évènements (ou la loi de probabilité) que l'on définit pour chaque expérience.

1) Loi de probabilité

Définition : Probabilité

Soit Ω un ensemble fini. On appelle **probabilité** sur Ω toute application

$$P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0;\ 1]$$

II - Espaces probabilisés finis

Un même univers peut correspondre a deux expériences aléatoires différentes. Par exemple, lancer un dé équilibré et lancer un dé truqué correspondent à l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ce qui les différencie, ce sont les probabilités des différents évènements (ou la loi de probabilité) que l'on définit pour chaque expérience.

1) Loi de probabilité

Définition : Probabilité

Soit Ω un ensemble fini. On appelle **probabilité** sur Ω toute application

$$P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0;\ 1]$$

telle que :

- $P\left(\Omega\right) = 1$

II - Espaces probabilisés finis

Un même univers peut correspondre a deux expériences aléatoires différentes. Par exemple, lancer un dé équilibré et lancer un dé truqué correspondent à l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ce qui les différencie, ce sont les probabilités des différents évènements (ou la loi de probabilité) que l'on définit pour chaque expérience.

1) Loi de probabilité

Définition : Probabilité

Soit Ω un ensemble fini. On appelle **probabilité** sur Ω toute application

$$P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0;\ 1]$$

telle que :

- $P(\Omega) = 1$
- Pour tous évènements incompatibles A et B (soit $A \cap B = \varnothing$), $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

II - Espaces probabilisés finis

Un même univers peut correspondre a deux expériences aléatoires différentes. Par exemple, lancer un dé équilibré et lancer un dé truqué correspondent à l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ce qui les différencie, ce sont les probabilités des différents évènements (ou la loi de probabilité) que l'on définit pour chaque expérience.

1) Loi de probabilité

Définition : Probabilité

Soit Ω un ensemble fini. On appelle **probabilité** sur Ω toute application

$$P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0;\ 1]$$

telle que :

- $P(\Omega) = 1$
- Pour tous évènements incompatibles A et B (soit $A \cap B = \varnothing$), $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Le triplet $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega),\ P)$ est un espace de probabilité.

Remarque : Pour tout **évènement** A, le **réel** $P(A)$ est appelé probabilité de l'évènement A.

Propriété -

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité et soient A et B deux évènements. Alors, on a :

Remarque : Pour tout **évènement** A, le **réel** $P(A)$ est appelé probabilité de l'évènement A.

Propriété -

Soit $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega),\ P)$ un espace de probabilité et soient A et B deux évènements. Alors, on a :

- $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$. Ainsi, $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$.

Remarque : Pour tout **évènement** A, le **réel** $P(A)$ est appelé probabilité de l'évènement A.

Propriété -

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité et soient A et B deux évènements. Alors, on a :

- $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$. Ainsi, $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$.
- $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$ (Formule des probabilités totales)

Démonstration de la propriété

Remarque : Pour tout **évènement** A, le **réel** $P(A)$ est appelé probabilité de l'évènement A.

Propriété -

Soit $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega),\ P)$ un espace de probabilité et soient A et B deux évènements. Alors, on a :

- $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$. Ainsi, $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$.
- $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$ (Formule des probabilités totales)

Démonstration de la propriété

Propriété - Crible de Poincaré

Soit $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega),\ P)$ un espace probabilisé fini et A, B, C trois évènements quelconque

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- $P(A \cup B \cup C) =$ $P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Exercice 2

Propriété -

Soit $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega),\ P)$ un espace probabilisé fini. Pour tout famille d'évènements $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux à deux incompatibles,

$$P\left(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n\right) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$$

Démonstration de la propriété par récurrence

Propriété -

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Pour tout famille d'évènements $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux à deux incompatibles,

$$P\left(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n\right) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$$

Démonstration de la propriété par récurrence

Remarque : Si les $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ forment un système complet d'évènements

$$P(A_1) + \ldots + P(A_n) = P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right) = P(\Omega) = 1.$$

Exercice 3

III - Probabilités conditionnelle

1) Arbre pondéré

III - Probabilités conditionnelle

1) Arbre pondéré

Exemple - Expérience

Dans un sac, on possède 10 jetons : 6 jetons rouges, numérotés 1,1,1,2,2,4 et quatre jetons verts, numérotés 2,2,4, 4. On tire au hasard un jeton du sac. On note R l'événement "obtenir un jeton rouge", V l'événement "obtenir un jeton vert", 1 l'événement "obtenir un jeton 1" ... .

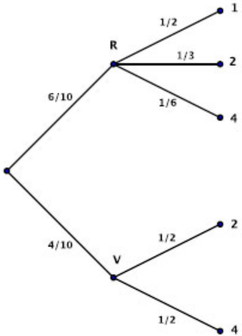
III - Probabilités conditionnelle

1) Arbre pondéré

Exemple - Expérience

Dans un sac, on possède 10 jetons : 6 jetons rouges, numérotés 1,1,1,2,2,4 et quatre jetons verts, numérotés 2,2,4, 4. On tire au hasard un jeton du sac. On note R l'événement "obtenir un jeton rouge", V l'événement "obtenir un jeton vert", 1 l'événement "obtenir un jeton 1" ... .

On représente cette situation par un arbre pondéré.



Par exemple, la branche -R-2 signifie que l'on a obtenu un jeton rouge numéroté 2.

Par exemple, la branche -R-2 signifie que l'on a obtenu un jeton rouge numéroté 2.

Propriété - Arbre pondéré

- Loi des nœuds : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Par exemple, la branche -R-2 signifie que l'on a obtenu un jeton rouge numéroté 2.

Propriété - Arbre pondéré

- Loi des nœuds : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de l'événement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

Par exemple, la branche -R-2 signifie que l'on a obtenu un jeton rouge numéroté 2.

Propriété - Arbre pondéré

- Loi des nœuds : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de l'événement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

Ainsi la probabilité de $R \cap 2$ est égale à

$$P(R \cap 2) = \frac{6}{10} \times \frac{1}{3} = P(R) \times P_R(2)$$

Exercice 4

2) Probabilité conditionnelle

2) Probabilité conditionnelle

Définition : Probabilités conditionnelles

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et soit A un évènement de probabilité **non nulle**. Alors l'application P_A définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ par

$$\forall B \in \mathscr{P}(\Omega), \quad P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)},$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ appelée probabilité sachant A. Elle est parfois notée $P\left(B|A\right)$.

2) Probabilité conditionnelle

Définition : Probabilités conditionnelles

Soit $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega),\ P)$ un espace probabilisé fini et soit A un évènement de probabilité **non nulle**. Alors l'application P_A définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ par

$$\forall B \in \mathscr{P}(\Omega), \quad P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)},$$

est une probabilité sur $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega))$ appelée probabilité sachant A. Elle est parfois notée $P\left(B|A\right)$.

Remarque : Importante La probabilité conditionnelle étant une probabilité, toutes les propriétés vraies pour une probabilité restent vraies pour la probabilité conditionnelle.

2) Probabilité conditionnelle

Définition : Probabilités conditionnelles

Soit $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega),\ P)$ un espace probabilisé fini et soit A un évènement de probabilité **non nulle**. Alors l'application P_A définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ par

$$\forall B \in \mathscr{P}(\Omega), \quad P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)},$$

est une probabilité sur $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega))$ appelée probabilité sachant A. Elle est parfois notée $P\left(B|A\right)$.

Remarque : Importante La probabilité conditionnelle étant une probabilité, toutes les propriétés vraies pour une probabilité restent vraies pour la probabilité conditionnelle.

Exemple - Probabilité conditionnelle

Dans l'exemple précédent, $P_V(2) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 5

3) Formule des probabilités composées

Théorème - Formule des probabilités composées.

On utilise souvent les probabilités conditionnelles pour déterminer la probabilité de l'intersection :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

3) Formule des probabilités composées

Théorème - Formule des probabilités composées.

On utilise souvent les probabilités conditionnelles pour déterminer la probabilité de l'intersection :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

On peut généraliser cette formule : Pour tous évènements $A_1, \ldots, A_n$, on a

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

3) Formule des probabilités composées

Théorème - Formule des probabilités composées.

On utilise souvent les probabilités conditionnelles pour déterminer la probabilité de l'intersection :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

On peut généraliser cette formule : Pour tous évènements $A_1, \ldots, A_n$, on a

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Remarque : Cette formule est très importante. On l'utilisera souvent pour déterminer la probabilité d'une intersection.

3) Formule des probabilités composées

Théorème - Formule des probabilités composées.

On utilise souvent les probabilités conditionnelles pour déterminer la probabilité de l'intersection :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

On peut généraliser cette formule : Pour tous évènements $A_1, \ldots, A_n$, on a

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3)\ldots P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Remarque : Cette formule est très importante. On l'utilisera souvent pour déterminer la probabilité d'une intersection.

Exemple - Probabilité composées

Dans l'exemple précédent,
$P(R \cap 4) = P(R) \times P_R(4) = \dfrac{6}{10} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{10}$.

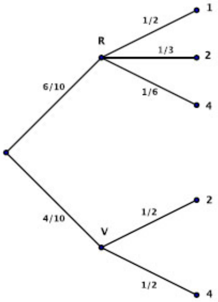
Exercice 6.

4) Formule des probabilités totales

4) Formule des probabilités totales

Propriété - Arbre et probabilités totale

Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.



Quelle est la probabilité de tirer un jeton avec le numéro 2 ?

Théorème - Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega),\ P)$ un espace probabilisé fini. Soit $(A_1, \ldots A_n)$ un système complet d'évènements de Ω de probabilité non nulle. Alors on a pour tout évènement B

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n) \\ &= P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n)P_{A_n}(B) \end{aligned}$$

Exercice 7(a,b,c)

5) Formule de Bayes

Théorème - Formule de Bayes

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soient A, B deux évènements de probabilité non nulle.

5) Formule de Bayes

Théorème - Formule de Bayes

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soient A, B deux évènements de probabilité non nulle. Alors

$$P_A(B) = \frac{P(B)}{P(A)} P_B(A)$$

5) Formule de Bayes

Théorème - Formule de Bayes

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soient A, B deux évènements de probabilité non nulle. Alors

$$P_A(B) = \frac{P(B)}{P(A)} P_B(A)$$

et

$$P(A) = \frac{P(B)P_B(A)}{P_A(B)}$$

5) Formule de Bayes

Théorème - Formule de Bayes

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soient A, B deux évènements de probabilité non nulle. Alors

$$P_A(B) = \frac{P(B)}{P(A)} P_B(A)$$

et

$$P(A) = \frac{P(B) P_B(A)}{P_A(B)}$$

Exemple - Formule de Bayes

Dans l'exemple du début, la probabilité, sachant qu'on a eu un jeton 2, que celui-ci soit vert, vaut

$$P_2(V) = \frac{P(V)}{P(2)} P_V(2) = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{4}{10}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Démonstration du théorème et fin de l' Exercice 7

IV - Indépendance

1) Indépendance de 2 évènements

IV - Indépendance

1) Indépendance de 2 évènements

Définition : Indépendance

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soient A, B deux évènements. On dit que A et B sont indépendants lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

IV - Indépendance

1) Indépendance de 2 évènements

Définition : Indépendance

Soit $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega),\ P)$ un espace probabilisé fini. Soient A, B deux évènements. On dit que A et B sont indépendants lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Propriété - Indépendance et probabilité conditionnelle

Soient A, B deux évènements de probabilité non nuls. Alors A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

IV - Indépendance

1) Indépendance de 2 évènements

Définition : Indépendance

Soit $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega),\ P)$ un espace probabilisé fini. Soient A, B deux évènements. On dit que A et B sont indépendants lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Propriété - Indépendance et probabilité conditionnelle

Soient A, B deux évènements de probabilité non nuls. Alors A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Propriété -

Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ sont indépendants et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice 8

2) Indépendance d'une famille d'évènements

Définition : Indépendance d'une famille d'évènements

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et A_1, ..., A_n sont n évènements.

2) Indépendance d'une famille d'évènements

Définition : Indépendance d'une famille d'évènements

Soit $(\Omega,\ \mathscr{P}(\Omega),\ P)$ un espace probabilisé fini et A_1, ..., A_n sont n évènements. On dit que A_1, ..., A_n sont deux à deux indépendants si :

$$\forall (i,\ j) \in [\![1, n]\!]^2\ ,\ i \neq j,\ P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$

V - Bilan sur les probabilités

Exercice sur les probabilités (partie 1).
Au début d'un exercice sur les probabilités, il faut traduire les hypothèses en évènements (modélisation). Ensuite :

1. **Si on calcule une probabilité simple ($P(B)$) :**
   - Si on a un système complet d'évènements, on peut utiliser le fait que la somme des probabilité fasse 1.
   - S'il s'agit de probabilités conditionnelles, si on a un système complet d'évènements, on utilise la formule des probabilités totales.
   - S'il y a équiprobabilité, on utilise les techniques de dénombrement (cf chap. 7)
   - S'il s'agit de variables aléatoires connues, on utilise la formule (cf Chap. 9)
2. **Si on calcule la probabilité d'une union ($P(A \cup B)$)**
   - Si les évènements sont **incompatibles**, on fait la **somme** des probabilités
   - Sinon, on utilise $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ou le crible de Poincaré.

Exercice sur les probabilités (partie 2).

3. **Si on calcule la probabilité d'une intersection ($P(A \cap B)$)**
   - Si les évènements sont **indépendants**, on fait le **produit** des probabilités.
   - S'il s'agit de probabilités conditionnelles, on utilise $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ ou la formule des probabilités composées.
4. **Si on calcule une probabilité conditionnelle ($P_A(B)$)**
   - On regarde avant tout si la probabilité n'est pas une hypothèse de l'exercice.
   - Si on connait $P(A \cap B)$ et $P(A)$, on utilise la définition.
   - Si on connait $P_B(A)$, on utilise la formule de Bayes.
5. **Si on calcule la probabilité de l'évènement contraire $P(\bar{A})$:**
   - Dans ce cas, on utilise $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Exercice sur les probabilités (partie 3).

6. **Pour montrer que 2 évènements sont indépendants :**
   - Regarder si c'est une hypothèse de l'énoncé.
   - Si c'est une expérience **identique** que l'on répète, les évènements sont indépendants.
   - Sinon, calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et vérifier que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.