

Définition et principe  
de récurrence.

Définition et notation

Trois types de définition

Principe de récurrence

Comportement des  
suites

Suites majorées, minorées,  
bornées

Suites monotones

Méthodes de recherche  
des variations d'une suite.

Suites particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques

Suites  
arithmético-géométrique

Suites récurrentes linéaires  
d'ordre 2

# Chapitre 3: Généralités sur les suites et suites usuelles.



## Savoir Faire:

- Démontrer par récurrence
- Déterminer la monotonie d'une suite
- Montrer qu'une suite est minorée ou majorée
- Déterminer la formulation explicite des suites classiques.



En économie, on a souvent besoin d'étudier des suites de données numériques, en particulier quand on suit l'évolution des valeurs d'une variable économique au cours du temps. On peut étudier par exemple la suite formée des valeurs successives :

- du PIB chaque année ;
- du taux de chômage chaque mois ;
- du taux d'inflation chaque année.

Il est donc utile pour l'économiste de savoir analyser des suites de nombres et répondre à des questions comme :

- les valeurs sont-elles de plus en plus élevées ?
- les valeurs de cette suite varient-elles de moins en moins avec le temps, pour se rapprocher d'un nombre donné ?



En économie, on a souvent besoin d'étudier des suites de données numériques, en particulier quand on suit l'évolution des valeurs d'une variable économique au cours du temps. On peut étudier par exemple la suite formée des valeurs successives :

- du PIB chaque année ;
- du taux de chômage chaque mois ;
- du taux d'inflation chaque année.

Il est donc utile pour l'économiste de savoir analyser des suites de nombres et répondre à des questions comme :

- les valeurs sont-elles de plus en plus élevées ?
- les valeurs de cette suite varient-elles de moins en moins avec le temps, pour se rapprocher d'un nombre donné ?

### Exemple - Évolution de l'épargne

J'ai initialement 2000 € d'économies et j'ajoute 100 € par mois à mon épargne. Quelles sont les premiers termes de la suite décrivant l'évolution de mon épargne ? Quelle formule donne le total de l'épargne au  $n^e$  mois ?

# I - Définition et principe de récurrence.

## 1) Définition et notation

# I - Définition et principe de récurrence.

## 1) Définition et notation

Définition : Suite numérique réelle.

Une suite numérique réelle est une fonction définie sur  $\mathbb{N}$  (ou sur une partie de  $\mathbb{N}$ ) et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

# I - Définition et principe de récurrence.

## 1) Définition et notation

Définition : Suite numérique réelle.

Une suite numérique réelle est une fonction définie sur  $\mathbb{N}$  (ou sur une partie de  $\mathbb{N}$ ) et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Une suite  $u$  définie par

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

se note plus simplement  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(u_n)$ . L'élément  $u_n$  est appelé terme de rang  $n$  de la suite  $u$ .

# I - Définition et principe de récurrence.

## 1) Définition et notation

Définition : Suite numérique réelle.

Une suite numérique réelle est une fonction définie sur  $\mathbb{N}$  (ou sur une partie de  $\mathbb{N}$ ) et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Une suite  $u$  définie par

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

se note plus simplement  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(u_n)$ . L'élément  $u_n$  est appelé terme de rang  $n$  de la suite  $u$ .

Exemple - Définition des suites

Dans l'exercice précédent, on note  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite décrivant l'épargne au cours du mois. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2000 + 100n.$$

## 2) Trois types de définition

Définition et principe  
de récurrence.

Définition et notation

**Trois types de définition**

Principe de récurrence

Comportement des  
suites

Suites majorées, minorées,  
bornées

Suites monotones

Méthodes de recherche  
des variations d'une suite.

Suites particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques

Suites  
arithmético-géométrique

Suites récurrentes linéaires  
d'ordre 2

## 2) Trois types de définition

1 **Définition explicite** -  $u_n = f(n)$ .

La suite peut être définie explicitement (souvent à l'aide d'une formule) :

## 2) Trois types de définition

① **Définition explicite** -  $u_n = f(n)$ .

La suite peut être définie explicitement (souvent à l'aide d'une formule) :

## 2) Trois types de définition

### 1 **Définition explicite** - $u_n = f(n)$ .

La suite peut être définie explicitement (souvent à l'aide d'une formule) :

- $u$  est définie par  $u_n = 2000 + 100n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

## 2) Trois types de définition

### 1 **Définition explicite** - $u_n = f(n)$ .

La suite peut être définie explicitement (souvent à l'aide d'une formule) :

- $u$  est définie par  $u_n = 2000 + 100n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- $v$  est la suite définie par  $v_n$  est la  $n^{\text{ème}}$  décimale de  $\pi$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## 2) Trois types de définition

### 1) **Définition explicite** - $u_n = f(n)$ .

La suite peut être définie explicitement (souvent à l'aide d'une formule) :

- $u$  est définie par  $u_n = 2000 + 100n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- $v$  est la suite définie par  $v_n$  est la  $n^{\text{ème}}$  décimale de  $\pi$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### 2) **Définition par récurrence** - $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Elle peut également être définie par récurrence, c'est à dire en fonction des anciennes valeurs de la suite.

## 2) Trois types de définition

### 1) **Définition explicite** - $u_n = f(n)$ .

La suite peut être définie explicitement (souvent à l'aide d'une formule) :

- $u$  est définie par  $u_n = 2000 + 100n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- $v$  est la suite définie par  $v_n$  est la  $n^{\text{ème}}$  décimale de  $\pi$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### 2) **Définition par récurrence** - $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Elle peut également être définie par récurrence, c'est à dire en fonction des anciennes valeurs de la suite.

- Dans les exemples précédents,  $u$  est la suite définie par  $u_0 = 2000$  et par  $u_{n+1} = u_n + 100$ .

## 2) Trois types de définition

### 1) **Définition explicite** - $u_n = f(n)$ .

La suite peut être définie explicitement (souvent à l'aide d'une formule) :

- $u$  est définie par  $u_n = 2000 + 100n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- $v$  est la suite définie par  $v_n$  est la  $n^{\text{ème}}$  décimale de  $\pi$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### 2) **Définition par récurrence** - $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Elle peut également être définie par récurrence, c'est à dire en fonction des anciennes valeurs de la suite.

- Dans les exemples précédents,  $u$  est la suite définie par  $u_0 = 2000$  et par  $u_{n+1} = u_n + 100$ .
- $$\left\{ \begin{array}{l} v_0 = 2, \quad v_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \frac{v_{n+1}}{v_n} \end{array} \right.$$

## 2) Trois types de définition

### 1) **Définition explicite** - $u_n = f(n)$ .

La suite peut être définie explicitement (souvent à l'aide d'une formule) :

- $u$  est définie par  $u_n = 2000 + 100n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- $v$  est la suite définie par  $v_n$  est la  $n^{\text{ème}}$  décimale de  $\pi$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### 2) **Définition par récurrence** - $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Elle peut également être définie par récurrence, c'est à dire en fonction des anciennes valeurs de la suite.

- Dans les exemples précédents,  $u$  est la suite définie par  $u_0 = 2000$  et par  $u_{n+1} = u_n + 100$ .
- $$\begin{cases} v_0 = 2, & v_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \frac{v_{n+1}}{v_n} \end{cases}$$

### 3) **Définition implicite.**

Une suite peut également être définie par une equation. Par exemple, soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n > 3$  par : " $u_n$  est l'unique solution de l'équation  $\ln(x) = nx$ ."

### 3) Principe de récurrence

*Le principe de récurrence est un raisonnement des mathématiques permettant de montrer des propositions dépendant d'un entier.*

Définition et principe  
de récurrence.

Définition et notation

Trois types de définition

Principe de récurrence

Comportement des  
suites

Suites majorées, minorées,  
bornées

Suites monotones

Méthodes de recherche  
des variations d'une suite.

Suites particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques

Suites  
arithmético-géométrique

Suites récurrentes linéaires  
d'ordre 2

### 3) Principe de récurrence

*Le principe de récurrence est un raisonnement des mathématiques permettant de montrer des propositions dépendant d'un entier.*

#### Définition : Principe de récurrence

Soit  $\mathcal{P}_n$  une proposition dépendant d'un entier et  $n_0 \in \mathbb{N}$ , fixé.

- Si  $\mathcal{P}_{n_0}$  est vraie (**initialisation**),
  - Si pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$  (**hérédité**),
- alors  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ .

### 3) Principe de récurrence

Le principe de récurrence est un raisonnement des mathématiques permettant de montrer des propositions dépendant d'un entier.

#### Définition : Principe de récurrence

Soit  $\mathcal{P}_n$  une proposition dépendant d'un entier et  $n_0 \in \mathbb{N}$ , fixé.

- Si  $\mathcal{P}_{n_0}$  est vraie (**initialisation**),
  - Si pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$  (**hérédité**),
- alors  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ .



#### Récurrance.

- 1 Énoncer clairement la propriété que l'on veut montrer.
- 2 Initialisation : Vérifier que la propriété est vraie au rang  $n_0$  (en général, c'est facile).
- 3 Hérédité : On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang  $n \geq n_0$  et on montre que la propriété est vraie au rang  $n + 1$ .
- 4 Conclusion : On réécrit clairement ce qu'on a démontré.



#### Exercice 1

## II - Comportement des suites

### 1) Suites majorées, minorées, bornées

Chapitre 3:  
Généralités sur les  
suites et suites  
usuelles.

Définition et principe  
de récurrence.

Définition et notation

Trois types de définition

Principe de récurrence

Comportement des  
suites

**Suites majorées, minorées,  
bornées**

Suites monotones

Méthodes de recherche  
des variations d'une suite.

Suites particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques

Suites  
arithmético-géométrique

Suites récurrentes linéaires  
d'ordre 2

## II - Comportement des suites

### 1) Suites majorées, minorées, bornées

#### Définition : Suites majorées, minorées, bornées

- Une suite  $(u_n)$  est dite minorée s'il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que  $m \leq u_n$  pour tout  $n$ .  $m$  s'appelle un minorant.
- Une suite  $(u_n)$  est dite majorée s'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $M \geq u_n$  pour tout  $n$ .  $M$  s'appelle un majorant.
- Une suite bornée est une suite à la fois majorée et minorée : il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que pour tout  $n$  :

$$m \leq u_n \leq M$$

## II - Comportement des suites

### 1) Suites majorées, minorées, bornées

#### Définition : Suites majorées, minorées, bornées

- Une suite  $(u_n)$  est dite minorée s'il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que  $m \leq u_n$  pour tout  $n$ .  $m$  s'appelle un minorant.
- Une suite  $(u_n)$  est dite majorée s'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $M \geq u_n$  pour tout  $n$ .  $M$  s'appelle un majorant.
- Une suite bornée est une suite à la fois majorée et minorée : il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que pour tout  $n$  :

$$m \leq u_n \leq M$$

#### Exemple -

La suite  $u$  définie par  $u_n = \frac{1}{n+1}$  est bornée car  $\forall n, 0 \leq u_n \leq 1$ .

## II - Comportement des suites

### 1) Suites majorées, minorées, bornées

#### Définition : Suites majorées, minorées, bornées

- Une suite  $(u_n)$  est dite minorée s'il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que  $m \leq u_n$  pour tout  $n$ .  $m$  s'appelle un minorant.
- Une suite  $(u_n)$  est dite majorée s'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $M \geq u_n$  pour tout  $n$ .  $M$  s'appelle un majorant.
- Une suite bornée est une suite à la fois majorée et minorée : il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que pour tout  $n$  :

$$m \leq u_n \leq M$$

#### Exemple -

La suite  $u$  définie par  $u_n = \frac{1}{n+1}$  est bornée car  $\forall n, 0 \leq u_n \leq 1$ .



Dans le cas d'une suite définie par récurrence, on peut également montrer qu'elle est bornée par récurrence.



Exercice ?

## 2) Suites monotones

Définition et principe  
de récurrence.

Définition et notation

Trois types de définition

Principe de récurrence

Comportement des  
suites

Suites majorées, minorées,  
bornées

**Suites monotones**

Méthodes de recherche  
des variations d'une suite.

Suites particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques

Suites  
arithmético-géométrique

Suites récurrentes linéaires  
d'ordre 2

## 2) Suites monotones

### Définition : Suites monotones

Soit  $(u_n)$  une suite.

- On dit que  $(u_n)$  est constante si  $u_n = u_{n+1}$  pour tout  $n$ .
- On dit que  $(u_n)$  est une suite croissante (resp strictement croissante) si  $u_n \leq u_{n+1}$  (resp  $u_n < u_{n+1}$ ) pour tout  $n$ .
- On dit que  $(u_n)$  est une suite décroissante (resp strictement décroissante) si  $u_n \geq u_{n+1}$  (resp  $u_n > u_{n+1}$ ) pour tout  $n$ .
- Une suite monotone est une suite soit croissante, soit décroissante.

## 2) Suites monotones

### Définition : Suites monotones

Soit  $(u_n)$  une suite.

- On dit que  $(u_n)$  est constante si  $u_n = u_{n+1}$  pour tout  $n$ .
- On dit que  $(u_n)$  est une suite croissante (resp strictement croissante) si  $u_n \leq u_{n+1}$  (resp  $u_n < u_{n+1}$ ) pour tout  $n$ .
- On dit que  $(u_n)$  est une suite décroissante (resp strictement décroissante) si  $u_n \geq u_{n+1}$  (resp  $u_n > u_{n+1}$ ) pour tout  $n$ .
- Une suite monotone est une suite soit croissante, soit décroissante.



**Remarque :** Une suite peut n'être monotone qu'à partir d'un certain rang  $n_0$ . Une suite constante à partir d'un certain rang est dit stationnaire.



*Exemples de suites monotones.*

Définition et principe  
de récurrence.

Définition et notation

Trois types de définition

Principe de récurrence

Comportement des  
suites

Suites majorées, minorées,  
bornées

Suites monotones

Méthodes de recherche  
des variations d'une suite.

Suites particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques

Suites  
arithmético-géométrique

Suites récurrentes linéaires  
d'ordre 2

## 3) Méthodes de recherche des variations d'une suite.

### 3) Méthodes de recherche des variations d'une suite.



#### Suites définies explicitement

Pour étudier la monotonie d'une suite  $(u_n)$  définie pour tout entier  $n \geq n_0$  par  $u_n = f(n)$ , on introduit la fonction  $f$  associée, et on étudie ses variations. On en déduit alors la monotonie de  $u$ .

- Si  $f$  est croissante sur  $[n_0; +\infty[$ , alors la suite  $(u_n)$  est croissante.
- Si  $f$  est décroissante sur  $[n_0; +\infty[$ , alors la suite  $(u_n)$  est décroissante.



*Démonstration de la méthode*



*Exercice 3*



## Méthode des soustractions

Soit une suite  $u$  donnée. On peut étudier le signe de la différence

$$u_{n+1} - u_n.$$

- Si  $\forall n, u_{n+1} - u_n \geq 0$ , alors la suite  $u$  est croissante.
- Si  $\forall n, u_{n+1} - u_n \leq 0$ , alors la suite  $u$  est décroissante.



### Exercice 4



## Méthode des soustractions

Soit une suite  $u$  donnée. On peut étudier le signe de la différence

$$u_{n+1} - u_n.$$

- Si  $\forall n, u_{n+1} - u_n \geq 0$ , alors la suite  $u$  est croissante.
- Si  $\forall n, u_{n+1} - u_n \leq 0$ , alors la suite  $u$  est décroissante.



### Exercice 4



## Méthode des divisions

Soit une suite  $u$  dont **tous les termes sont strictement positifs**. On a alors

- Si  $\forall n, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ , alors la suite  $u$  est croissante.
- Si  $\forall n, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ , alors la suite  $u$  est décroissante.



### Exercice 5

## Exemple - Suites géométriques

- Si  $a > 1$ , la suite  $(a^n)$  est strictement croissante.
- Si  $a = 1$ , la suite  $(a^n)$  est constante.
- Si  $0 < a < 1$ , la suite  $(a^n)$  est strictement décroissante.

## Exemple - Suites géométriques

- Si  $a > 1$ , la suite  $(a^n)$  est strictement croissante.
- Si  $a = 1$ , la suite  $(a^n)$  est constante.
- Si  $0 < a < 1$ , la suite  $(a^n)$  est strictement décroissante.



### Méthode par récurrence

Dans le cas d'une suite définie par récurrence, on peut étudier sa monotonie par récurrence, en prenant comme hypothèse de récurrence  $\mathcal{P}_n : "u_{n+1} \geq u_n"$  pour montrer que la suite est croissante, ou  $\mathcal{P}_n : "u_{n+1} \leq u_n"$  pour montrer qu'elle est décroissante



### Exercice 6

# III - Suites particulières

## 1) Suites arithmétiques

Chapitre 3:  
Généralités sur les  
suites et suites  
usuelles.

Définition et principe  
de récurrence.

Définition et notation

Trois types de définition

Principe de récurrence

Comportement des  
suites

Suites majorées, minorées,  
bornées

Suites monotones

Méthodes de recherche  
des variations d'une suite.

Suites particulières

**Suites arithmétiques**

Suites géométriques

Suites  
arithmético-géométrique

Suites récurrentes linéaires  
d'ordre 2

## III - Suites particulières

### 1) Suites arithmétiques

#### Définition : Suites arithmétiques

Une suite arithmétique est une suite  $(u_n)$  définie par une formule de récurrence de la forme  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$  avec  $r \in \mathbb{R}$ . Le nombre  $r$  est appelé la raison de la suite.

## III - Suites particulières

### 1) Suites arithmétiques

#### Définition : Suites arithmétiques

Une suite arithmétique est une suite  $(u_n)$  définie par une formule de récurrence de la forme  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$  avec  $r \in \mathbb{R}$ . Le nombre  $r$  est appelé la raison de la suite.

#### Exemple - Retour à l'exemple du début

Dans l'exemple du début, l'évolution de l'épargne est une suite arithmétique de premier terme  $u_0 = 2000$  et de raison 100.

# III - Suites particulières

## 1) Suites arithmétiques

### Définition : Suites arithmétiques

Une suite arithmétique est une suite  $(u_n)$  définie par une formule de récurrence de la forme  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$  avec  $r \in \mathbb{R}$ . Le nombre  $r$  est appelé la raison de la suite.

### Exemple - Retour à l'exemple du début

Dans l'exemple du début, l'évolution de l'épargne est une suite arithmétique de premier terme  $u_0 = 2000$  et de raison 100.

### Propriété - Formule explicite

Soit  $u$  une suite arithmétique de raison  $r$ , alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$$

Si la suite  $u$  n'est définie qu'à partir d'un rang  $p \in \mathbb{N}$ , alors :

$$\forall n \geq p, u_n = u_p + (n - p)r$$



*Preuve de la propriété par récurrence*

## Corollaire

Somme des  $n$  premiers entiers On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



*Démonstration directe de la propriété*

## Corollaire

Somme des  $n$  premiers entiers On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



*Démonstration directe de la propriété*

## Propriété - Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit  $u$  une suite arithmétique de raison  $r$  :

- si  $r > 0$  alors la suite  $u$  est strictement croissante
- si  $r < 0$  alors la suite  $u$  est strictement décroissante
- si  $r = 0$  alors la suite  $u$  est constante.



*Preuve directe des deux propriétés*

## 2) Suites géométriques

### Définition : Suites géométriques

Une suite géométrique est une suite  $(u_n)$  définie par une formule de récurrence de la forme :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$  avec  $q \in \mathbb{R}$ . Le nombre  $q$  est appelé la raison de la suite.

## 2) Suites géométriques

### Définition : Suites géométriques

Une suite géométrique est une suite  $(u_n)$  définie par une formule de récurrence de la forme :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$  avec  $q \in \mathbb{R}$ . Le nombre  $q$  est appelé la raison de la suite.

### Propriété - Formule explicite

Soit  $u$  une suite géométrique de raison  $q$ , alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$$

Si la suite  $u$  n'est définie qu'à partir d'un rang  $p \in \mathbb{N}$ , alors :

$$\forall n \geq p, u_n = u_p \times q^{n-p}$$



*Preuve de la propriété par récurrence*

Définition et principe  
de récurrence.

Définition et notation

Trois types de définition

Principe de récurrence

Comportement des  
suites

Suites majorées, mineures,  
bornées

Suites monotones

Méthodes de recherche  
des variations d'une suite.

Suites particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques

Suites  
arithmético-géométrique

Suites récurrentes linéaires  
d'ordre 2

## Propriété - Somme des $n$ premiers termes d'une suite géométrique

Soit  $q \neq 1$  et  $0 \leq p \leq n$ , on a alors

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{et} \quad q^p + \dots + q^n = q^p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$



### Exercice 7

## Propriété - Sens de variation d'une suite géométrique

Soit  $u$  une suite géométrique de raison  $q$  et de terme initial  $u_0 > 0$  :

- si  $0 < q < 1$  alors la suite  $u$  est strictement décroissante
- si  $q = 1$  alors la suite  $u$  est constante ou stationnaire
- si  $q > 1$  alors la suite  $u$  est strictement croissante
- si  $q < 0$  alors la suite  $u$  n'est ni croissante ni décroissante (ses termes sont alternativement positifs et négatifs).

## Propriété - Sens de variation d'une suite géométrique

Soit  $u$  une suite géométrique de raison  $q$  et de terme initial  $u_0 > 0$  :

- si  $0 < q < 1$  alors la suite  $u$  est strictement décroissante
- si  $q = 1$  alors la suite  $u$  est constante ou stationnaire
- si  $q > 1$  alors la suite  $u$  est strictement croissante
- si  $q < 0$  alors la suite  $u$  n'est ni croissante ni décroissante (ses termes sont alternativement positifs et négatifs).

## Exemple - Suite non monotone

La suite  $(-1)^n$  n'est pas monotone.

### 3) Suites arithmético-géométrique

*Ces suites s'appellent aussi suites récurrentes linéaire d'ordre 1.*

Définition et principe  
de récurrence.

Définition et notation

Trois types de définition

Principe de récurrence

Comportement des  
suites

Suites majorées, minorées,  
bornées

Suites monotones

Méthodes de recherche  
des variations d'une suite.

Suites particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques

Suites  
arithmético-géométrique

Suites récurrentes linéaires  
d'ordre 2

### 3) Suites arithmético-géométrique

*Ces suites s'appellent aussi suites récurrentes linéaire d'ordre 1.*

#### Définition : Suites arithmético-géométrique

Une suite  $u$  est une suite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  et  $b \in \mathbb{R}^*$ , tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a \times u_n + b.$$

Définition et principe  
de récurrence.

Définition et notation

Trois types de définition

Principe de récurrence

Comportement des  
suites

Suites majorées, mineures,  
bornées

Suites monotones

Méthodes de recherche  
des variations d'une suite.

Suites particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques

Suites  
arithmético-géométrique

Suites récurrentes linéaires  
d'ordre 2


### 3) Suites arithmético-géométrique

*Ces suites s'appellent aussi suites récurrentes linéaire d'ordre 1.*

#### Définition : Suites arithmético-géométrique

Une suite  $u$  est une suite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  et  $b \in \mathbb{R}^*$ , tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a \times u_n + b.$$

 **Remarque** : Une suite arithmético-géométrique est définie par la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f$  une fonction affine de la forme  $f(x) = ax + b$


### 3) Suites arithmético-géométrique

Ces suites s'appellent aussi suites récurrentes linéaire d'ordre 1.

#### Définition : Suites arithmético-géométrique

Une suite  $u$  est une suite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  et  $b \in \mathbb{R}^*$ , tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a \times u_n + b.$$

 **Remarque** : Une suite arithmético-géométrique est définie par la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f$  une fonction affine de la forme  $f(x) = ax + b$

#### Propriété - Formule explicite

Soit  $u$  une suite arithmético-géométrique. Avec les notations de la définition, soit  $\alpha$  le réel solution de l'équation  $x = ax + b$ . Alors la suite  $v$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \alpha$  est une suite géométrique de raison  $a$ .



#### Exercice 8

## 4) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition et principe  
de récurrence.

Définition et notation

Trois types de définition

Principe de récurrence

Comportement des  
suites

Suites majorées, minorées,  
bornées

Suites monotones

Méthodes de recherche  
des variations d'une suite.

Suites particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques

Suites  
arithmético-géométrique

Suites récurrentes linéaires  
d'ordre 2

## 4) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

### Définition : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Une suite  $u$  est une suite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe deux réels  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}^*$ , tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a \times u_{n+1} + b \times u_n.$$

## 4) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

### Définition : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Une suite  $u$  est une suite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe deux réels  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}^*$ , tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a \times u_{n+1} + b \times u_n.$$



**Remarque :** On a besoin pour définir ce type de suite de ses deux premiers termes  $u_0$  et  $u_1$ .

## 4) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

### Définition : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Une suite  $u$  est une suite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe deux réels  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}^*$ , tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a \times u_{n+1} + b \times u_n.$$



**Remarque :** On a besoin pour définir ce type de suite de ses deux premiers termes  $u_0$  et  $u_1$ .

### Propriété -

Soit  $u$  une suite récurrente d'ordre 2, vérifiant pour tout  $n$ ,  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ . Alors la suite géométrique  $(q^n)$  ( $q \neq 0$ ) est solution de la récurrence si et seulement si  $q^2 = aq + b$ .



*Démonstration de la propriété par double implication*

## Propriété - Formule explicite

Soit  $u$  une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ . On pose l'équation (E) :  $x^2 - ax - b = 0$  appelée **équation caractéristique de  $u$** .

- si l'équation (E) admet deux solutions réelles  $x_1$  et  $x_2$ , alors il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \times x_1^n + \mu \times x_2^n$$

- si l'équation (E) admet une solution réelle  $x_0$ , alors il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu \times n)x_0^n$$

## Propriété - Formule explicite

Soit  $u$  une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ . On pose l'équation (E) :  $x^2 - ax - b = 0$  appelée **équation caractéristique de  $u$** .

- si l'équation (E) admet deux solutions réelles  $x_1$  et  $x_2$ , alors il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \times x_1^n + \mu \times x_2^n$$

- si l'équation (E) admet une solution réelle  $x_0$ , alors il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu \times n)x_0^n$$



### Déterminer l'expression d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

- 1 On pose l'équation caractéristique (E).
- 2 On détermine les solutions de l'équation caractéristique.
- 3 Une fois la (ou les) solution(s) trouvée(s), on utilise les deux premiers termes pour obtenir un système nous donnant  $\lambda$  et  $\mu$ .