

Chapitre 24: Variables aléatoire à densité



Exercice 1(a,b,c)

I - Variables aléatoires à densité.



L'objectif de ce chapitre est de s'intéresser aux variable aléatoires dont le support est un intervalle, et non plus fini ou dénombrable.

I - Variables aléatoires à densité.



L'objectif de ce chapitre est de s'intéresser aux variables aléatoires dont le support est un intervalle, et non plus fini ou dénombrable.

Dans tout le chapitre, on se donne un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et X une variable aléatoire dont le support $X(\Omega)$ est un intervalle ou une union d'intervalles.

1) Notion de densité



Rappelez ce qu'est une fonction de répartition dans le cas discret.

I - Variables aléatoires à densité.



L'objectif de ce chapitre est de s'intéresser aux variables aléatoires dont le support est un intervalle, et non plus fini ou dénombrable.

Dans tout le chapitre, on se donne un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et X une variable aléatoire dont le support $X(\Omega)$ est un intervalle ou une union d'intervalles.

1) Notion de densité



Rappelez ce qu'est une fonction de répartition dans le cas discret.

Définition : Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On note F_X sa fonction de répartition : $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$. On dit que X est une variable à densité lorsque F_X est continue sur \mathbb{R} , et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement un nombre fini de points.



Exercice 1 (d)



Montrer qu'une variable aléatoire est à densité.

Pour démontrer qu'une variable aléatoire est à densité, il suffit de montrer :

- 1 F_X est croissante sur \mathbb{R} .
- 2 De limite 0 en $-\infty$ et de limite 1 en $+\infty$.
- 3 Continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf en un nombre fini de points.



Montrer qu'une variable aléatoire est à densité.

Pour démontrer qu'une variable aléatoire est à densité, il suffit de montrer :

- 1 F_X est croissante sur \mathbb{R} .
- 2 De limite 0 en $-\infty$ et de limite 1 en $+\infty$.
- 3 Continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf en un nombre fini de points.



Remarque : F_X étant de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en un nombre fini de point, on peut définir une fonction continue f_X telle que $f'_X = F'_X$ sauf éventuellement en un nombre fini de point.



Exercice 2(a)

Définition : Densité de probabilité


Soit X une variable aléatoire à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) et F_X sa fonction de répartition. On appelle densité de X toute fonction f_X , positive sur $;\mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ où F_X est de classe \mathcal{C}^1 ,

$$f_X(x) = F'_X(x).$$

Définition : Densité de probabilité

Soit X une variable aléatoire à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) et F_X sa fonction de répartition. On appelle densité de X toute fonction f_X , positive sur $;\mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ où F_X est de classe \mathcal{C}^1 ,


$$f_X(x) = F'_X(x).$$

 **Remarque :** Une fonction de densité n'est pas unique et la valeur prise par la densité aux points où F_x n'est pas \mathcal{C}^1 n'a aucune importance.

Définition : Densité de probabilité

Soit X une variable aléatoire à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) et F_X sa fonction de répartition. On appelle densité de X toute fonction f_X , positive sur $;\mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ où F_X est de classe \mathcal{C}^1 ,

$$f_X(x) = F'_X(x).$$

 **Remarque :** Une fonction de densité n'est pas unique et la valeur prise par la densité aux points où F_x n'est pas \mathcal{C}^1 n'a aucune importance.

Théorème - Non unicité de la densité

Soit f une fonction, à valeurs positives, qui ne diffère de F'_X qu'en un nombre fini de points. Alors f est également une densité de X .



Exercice 2 (b)

2) Propriétés



Rappeler les propriétés des fonctions de répartition

2) Propriétés



Rappeler les propriétés des fonctions de répartition

Propriété - Densité

Soit X une variable aléatoire à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) , F_X sa fonction de répartition et f_X une densité de X .

$$\textcircled{1} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = 1.$$

2) Propriétés



Rappeler les propriétés des fonctions de répartition

Propriété - Densité

Soit X une variable aléatoire à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) , F_X sa fonction de répartition et f_X une densité de X .

①
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = 1.$$

② La fonction f_X est continue sauf éventuellement en un nombre fini de points.



Comment calculer $P(X \leq x)$ ou $P(X > x)$?



Comment calculer $P(X \leq x)$ ou $P(X > x)$?

Théorème -

Soit X une variable aléatoire à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) , F_X sa fonction de répartition et f_X une densité de X . Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$



Comment calculer $P(X \leq x)$ ou $P(X > x)$?

Théorème -

Soit X une variable aléatoire à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) , F_X sa fonction de répartition et f_X une densité de X . Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

$$P(X > x) = 1 - F_X(x) = \int_x^{+\infty} f_X(t) dt.$$



Comment calculer $P(X \leq x)$ ou $P(X > x)$?

Théorème -

Soit X une variable aléatoire à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) , F_X sa fonction de répartition et f_X une densité de X . Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

$$P(X > x) = 1 - F_X(x) = \int_x^{+\infty} f_X(t) dt.$$



Remarque : Puisque la fonction de répartition définit la loi de X , d'après ce qui précède, la connaissance d'une densité f_X permet de connaître complètement F_X , et donc la loi de X .



Que vaut $P(X = x)$? $P(a \leq X < b)$?



Que vaut $P(X = x)$? $P(a \leq X < b)$?

Propriété -

Soit X une variable aléatoire à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) , F_X sa fonction de répartition et f_X une densité de X . Alors,

- 1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(X = x) = 0$.



Que vaut $P(X = x)$? $P(a \leq X < b)$?

Propriété -

Soit X une variable aléatoire à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) , F_X sa fonction de répartition et f_X une densité de X . Alors,

- 1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(X = x) = 0$.
- 2 Pour tous a et b dans \mathbb{R} tels que $a < b$,

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) \\ &= P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t) dt \end{aligned}$$



Exercice 3

3) Reconnaitre une densité

Théorème - Densité

Soit f une fonction positive, continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en un nombre fini de points, telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$$

Alors f est la densité d'une variable aléatoire.

3) Reconnaitre une densité

Théorème - Densité

Soit f une fonction positive, continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en un nombre fini de points, telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$$

Alors f est la densité d'une variable aléatoire.



Reconnaitre une densité


Pour démontrer qu'une fonction est une densité, il faut donc montrer trois points :

- f est positive sur \mathbb{R} .
- f est continue sur \mathbb{R} (sauf éventuellement en un nombre fini de points).
- et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.




Exercice 4

4) Transformation affine

 Soit Y une variable aléatoire discrète ayant pour loi, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = (1 - a)^{n-2}a$. Déterminer la loi de $Z = X + 1$, puis l'espérance et la variance de X .

4) Transformation affine


 Soit Y une variable aléatoire discrète ayant pour loi, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = (1 - a)^{n-2}a$. Déterminer la loi de $Z = X + 1$, puis l'espérance et la variance de X .

Théorème - Transformation affine

Soit X une variable aléatoire à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) , de fonction de répartition F_X et de densité f_X . Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$. Alors $Y = aX + b$ est également une variable à densité, dont une densité est

$$f_Y : x \rightarrow \frac{1}{|a|} f_X \left(\frac{x - b}{a} \right)$$


4) Transformation affine

 Soit Y une variable aléatoire discrète ayant pour loi, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = (1 - a)^{n-2}a$. Déterminer la loi de $Z = X + 1$, puis l'espérance et la variance de X .

Théorème - Transformation affine

Soit X une variable aléatoire à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) , de fonction de répartition F_X et de densité f_X . Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$. Alors $Y = aX + b$ est également une variable à densité, dont une densité est

$$f_Y : x \rightarrow \frac{1}{|a|} f_X \left(\frac{x - b}{a} \right)$$

 **Remarque :** Il est inutile d'apprendre ce résultat. En effet, il est souvent plus simple de le retrouver, en partant de $F_Y(x) = P(Y \leq x)$ et en revenant à X .



Démonstration du théorème et Exercice 5.

II - Espérance d'une variable aléatoire à densité

1) Définition



Comment calcule-t-on l'espérance dans le cas discret ?

II - Espérance d'une variable aléatoire à densité

1) Définition



Comment calcule-t-on l'espérance dans le cas discret ?

Définition : Espérance

Soit X une variable aléatoire à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) de densité f_X . On dit que X admet une espérance si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$ est absolument convergente. Dans ce cas, on appelle espérance de X , et on note $E(X)$ le nombre

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$$

II - Espérance d'une variable aléatoire à densité

1) Définition



Comment calcule-t-on l'espérance dans le cas discret ?

Définition : Espérance

Soit X une variable aléatoire à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) de densité f_X . On dit que X admet une espérance si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$ est absolument convergente. Dans ce cas, on appelle espérance de X , et on note $E(X)$ le nombre

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$$



Remarque : Il faut que l'intégrale soit absolument convergente.



Exercice 6



VA admettant une espérance

Pour montrer qu'une variable aléatoire à densité admet une espérance, on procède en deux temps :

- 1 On montre que l'intégrale est absolument convergente :

Pour cela, on calcule $\int_a^0 t f_X(t) dt$ et $\int_0^b t f_X(t) dt$ et on montre que ces intégrales admettent une limite lorsque a tend vers $-\infty$ et b tend vers $+\infty$.

- 2 On conclut alors que X admet une espérance qui vaut alors $\int_{-\infty}^0 t f_X(t) dt + \int_0^{+\infty} t f_X(t) dt$, valeurs qu'on aura calculées précédemment.



Exercice 7

2) Propriétés.



Rappeler la propriété de linéarité de l'espérance.

2) Propriétés.



Rappeler la propriété de linéarité de l'espérance.

Propriété - Linéarité de l'espérance

Soit X une variable aléatoire à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) **admettant une espérance** et soit a un réel non nul et b un réel quelconque. Alors la variable aléatoire $aX + b$ admet également une espérance et on a

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$



Exercice 8

3) Variable aléatoire centrée



Rappeler ce qu'est une variable aléatoire centrée.

3) Variable aléatoire centrée



Rappeler ce qu'est une variable aléatoire centrée.

Définition : Variable aléatoire centrée

Soit X une variable aléatoire à densité sur (Ω, \mathcal{A}, P) **admettant une espérance**.

- On dit que X est une variable aléatoire centrée si $E(X) = 0$.
- Si X n'est pas centrée, la variable aléatoire $Y = X - E(X)$ est une variable aléatoire à densité centrée.

III - Lois usuelles à densité

1) La loi uniforme

III - Lois usuelles à densité

1) La loi uniforme

Définition : Loi uniforme

Soit X une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On dit que X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ et on note $X \hookrightarrow U([a; b])$, si X est une variable aléatoire à densité, de densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$


III - Lois usuelles à densité

1) La loi uniforme

Définition : Loi uniforme

Soit X une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On dit que X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ et on note $X \hookrightarrow U([a; b])$, si X est une variable aléatoire à densité, de densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

 **Remarque :** La loi uniforme sur $[a; b]$ est la même que sur $]a; b[$, $]a; b]$ ou $]a; b[$.

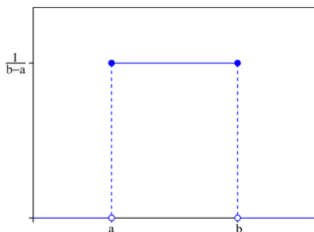


Exercice 9

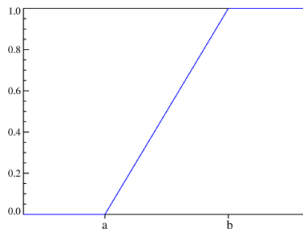
Théorème - Fonction de répartition de la loi uniforme

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a; b]$. La fonction de répartition de X est la fonction F_X définie sur \mathbb{R} par

$$F_X(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$



Densité de probabilité



Fonction de répartition



Exercice 10



Quelle est l'espérance d'une variable uniforme dans le cas discret ?



Quelle est l'espérance d'une variable uniforme dans le cas discret ?

Théorème - Espérance de la loi uniforme

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a; b]$. X admet une espérance et

$$E(X) = \frac{a + b}{2}$$



Exercice 11

2) Loi exponentielle

2) Loi exponentielle

Définition : Loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) et $\lambda > 0$. On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre λ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, si X est une variable aléatoire à densité, de densité


$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2) Loi exponentielle

Définition : Loi exponentielle

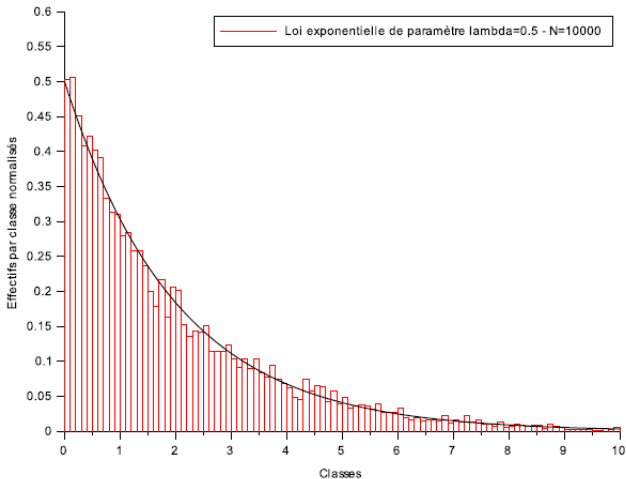
Soit X une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) et $\lambda > 0$. On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre λ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, si X est une variable aléatoire à densité, de densité

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

 **Remarque :** La loi exponentielle est à support sur \mathbb{R}_+ mais peut également être définie sur \mathbb{R}_+^* .



Exercice 12



Théorème - Fonction de répartition de la loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ . La fonction de répartition de X est la fonction F_X définie sur \mathbb{R} par

$$F_X(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



Exercice 13

Théorème - Fonction de répartition de la loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ . La fonction de répartition de X est la fonction F_X définie sur \mathbb{R} par

$$F_X(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



Exercice 13



Quelle est l'espérance d'une variable aléatoire géométrique ?

Théorème - Fonction de répartition de la loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ . La fonction de répartition de X est la fonction F_X définie sur \mathbb{R} par

$$F_X(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



Exercice 13



Quelle est l'espérance d'une variable aléatoire géométrique ?

Théorème - Espérance de la loi uniforme

Théorème - Fonction de répartition de la loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ . La fonction de répartition de X est la fonction F_X définie sur \mathbb{R} par

$$F_X(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



Exercice 13



Quelle est l'espérance d'une variable aléatoire géométrique ?

Théorème - Espérance de la loi uniforme

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ . X admet une espérance et

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$



Exercice 14

Définition : Loi sans mémoire


Soit X une variable aléatoire à valeurs positives, et telle que pour tout $a \geq 0$, $P(X > a) > 0$. On dit que la loi de X est sans mémoire si

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad P_{(X>a)}(X > a + b) = P(X > b)$$

Définition : Loi sans mémoire

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives, et telle que pour tout $a \geq 0$, $P(X > a) > 0$. On dit que la loi de X est sans mémoire si

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad P_{(X>a)}(X > a + b) = P(X > b)$$


 **Remarque :** Par définition des probabilités conditionnelles, la loi de X est sans mémoire ssi

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad P(X > a + b) = P(X > a)P(X > b)$$

Définition : Loi sans mémoire

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives, et telle que pour tout $a \geq 0$, $P(X > a) > 0$. On dit que la loi de X est sans mémoire si

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad P_{(X>a)}(X > a + b) = P(X > b)$$

 **Remarque :** Par définition des probabilités conditionnelles, la loi de X est sans mémoire ssi

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad P(X > a + b) = P(X > a)P(X > b)$$

Théorème - La loi exponentielle est sans mémoire

Soit X une variable à densité, à valeurs positives, et telle que $\forall a > 0$, $P(X > a) > 0$. Alors X est une variable sans mémoire si et seulement si X suit une loi exponentielle.

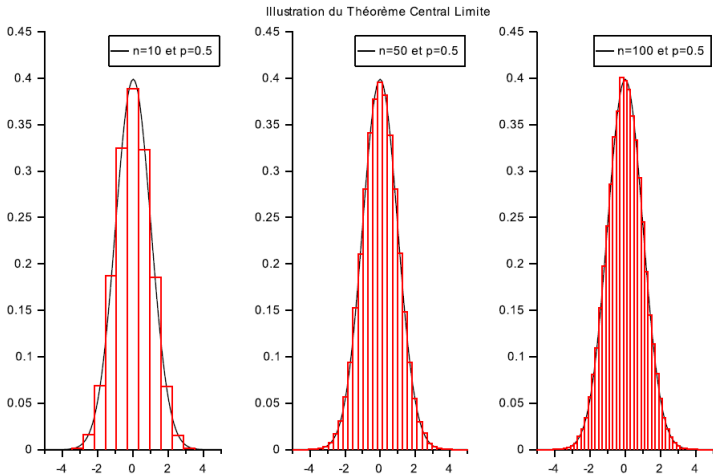
3) Loi normale

3) Loi normale

Dans cette partie, on se fixe un réel $p \in]0; 1[$ et on considère Z_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre p et n que l'on centre et réduit.

3) Loi normale

Dans cette partie, on se fixe un réel $p \in]0; 1[$ et on considère Z_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre p et n que l'on centre et réduit.



Définition : Densité de la loi normale centrée réduite

Soit X une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On dit que X suit une loi normale centrée réduite et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, si X est une variable aléatoire à densité, de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Exercice 15

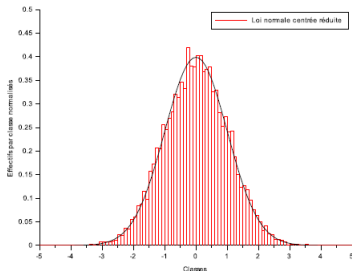
Définition : Densité de la loi normale centrée réduite

Soit X une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On dit que X suit une loi normale centrée réduite et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, si X est une variable aléatoire à densité, de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Exercice 15



Théorème - Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi normale centrée réduite.

- Sa fonction de répartition est notée Φ :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Théorème - Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi normale centrée réduite.

- Sa fonction de répartition est notée Φ :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- Pour tout réel x , $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, et $\Phi(0) = \frac{1}{2}$

Théorème - Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi normale centrée réduite.

- Sa fonction de répartition est notée Φ :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- Pour tout réel x , $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, et $\Phi(0) = \frac{1}{2}$
- Pour tout réel x , $P(-x \leq X \leq x) = 2\Phi(x) - 1$.

Théorème - Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi normale centrée réduite.

- Sa fonction de répartition est notée Φ :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- Pour tout réel x , $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, et $\Phi(0) = \frac{1}{2}$
- Pour tout réel x , $P(-x \leq X \leq x) = 2\Phi(x) - 1$.
- X admet une espérance et $E(X) = 0$.

Théorème - Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi normale centrée réduite.

- Sa fonction de répartition est notée Φ :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- Pour tout réel x , $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, et $\Phi(0) = \frac{1}{2}$
- Pour tout réel x , $P(-x \leq X \leq x) = 2\Phi(x) - 1$.
- X admet une espérance et $E(X) = 0$.



Remarque : Vous verrez l'année prochaine que X admet une variance, qui vaut 1. D'où la notation $\mathcal{N}(0, 1)$.



Exercice 16

Définition : Densité de la loi normale

Soit X une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) , $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.
On dit que X suit la loi normale de paramètre (μ, σ^2) , et on note
 $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si X est une variable aléatoire à densité, de
densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Exercice 17

Définition : Densité de la loi normale

Soit X une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) , $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.
On dit que X suit la loi normale de paramètre (μ, σ^2) , et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si X est une variable aléatoire à densité, de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Exercice 17

Théorème - Espérance

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres (μ, σ^2) . Alors X admet une espérance, et $E(X) = \mu$.

Définition : Densité de la loi normale

Soit X une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) , $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.
On dit que X suit la loi normale de paramètre (μ, σ^2) , et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si X est une variable aléatoire à densité, de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Exercice 17

Théorème - Espérance

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres (μ, σ^2) . Alors X admet une espérance, et $E(X) = \mu$.



Remarque : Vous verrez que X admet une variance, qui vaut σ^2 . Ainsi σ représente l'écart-type de la loi normale.



Exercice 18

Propriété - Transformation affine

Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Alors

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$



Exercice 19