

# Chapitre 22: Intégrales impropres

M Leboucher

Lycée Stanislas Cannes - ECE 1



## Savoir Faire:

- Étudier la nature et calculer la valeur d'une intégrale généralisée.
- Étudier la nature et calculer la valeur d'une double intégrale généralisée.
- Étudier la nature d'une intégrale généralisée par comparaison.



## Exercice 1

## I - Intégrale sur un intervalle quelconque.

### Définition : Intégrale impropre

- ❶ Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, +\infty[$ . On dit que l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  est convergente si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$  existe et est finie. Dans ce cas, on note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt = \int_a^{+\infty} f(t)dt$$

- ❷ On définit de même  $\int_{-\infty}^a f(t)dt$

## I - Intégrale sur un intervalle quelconque.

### Définition : Intégrale impropre

- ❶ Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, +\infty[$ . On dit que l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  est convergente si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$  existe et est finie. Dans ce cas, on note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt = \int_a^{+\infty} f(t)dt$$

- ❷ On définit de même  $\int_{-\infty}^a f(t)dt$



### Calcul d'intégrale impropre

- ❶ On pose  $x$  afin de calculer l'intégrale sur un segment.  
❷ On fait tendre  $x$  vers l'infini.



### Exercice 2

## Définition : Intégrale impropre

Soit  $f$  une fonction continue sur  $]a, b[$  (avec  $a$  et  $b$  pouvant valoir  $-\infty$  ou  $+\infty$ ) et  $c \in ]a, b[$ . On dit que l'intégrale  $\int_a^b f(t)dt$  est convergente ssi  $\lim_{x \rightarrow a} \int_x^c f(t)dt$  et  $\lim_{x \rightarrow b} \int_c^x f(t)dt$  existent et sont finies. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow a} \int_x^c f(t)dt + \lim_{x \rightarrow b} \int_c^x f(t)dt$$



**Remarque :** Dans les deux cas, ces intégrales sont appelés impropres car une intégrale n'est définie rigoureusement que sur un segment.



### Exercice 3

Intégrale sur un  
intervalle quelconque.

Intégrales de  
références

Propriétés des  
intégrales impropres

Linéarité de l'intégrale

Relation de Chasles

Comparaisons

Convergence absolue.

## II - Intégrales de références



Tout comme les sommes, certaines intégrales sont tellement importantes qu'on les appelle intégrales de références. Elles sont à connaître par cœur.



*Rappeler ce qu'est une série de Riemann ?*

## II - Intégrales de références



Tout comme les sommes, certaines intégrales sont tellement importantes qu'on les appelle intégrales de références. Elles sont à connaître par cœur.



*Rappeler ce qu'est une série de Riemann ?*

### Propriété - Intégrale de Riemann (1)

L'intégrale impropre  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$  est convergente si et seulement si  $\alpha > 1$ . Dans ce cas

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}$$



*Exercice 4*



## *Que se passe-t-il pour une intégrale de Riemann en 0 ?*

Intégrale sur un  
intervalle quelconque.

**Intégrales de  
références**

Propriétés des  
intégrales impropres

Linéarité de l'intégrale

Relation de Chasles

Comparaisons

Convergence absolue.



Que se passe-t-il pour une intégrale de Riemann en 0 ?

## Propriété - Intégrale de Riemann (2)

L'intégrale impropre  $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$  est convergente si et seulement si  $\alpha < 1$ . Dans ce cas

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1 - \alpha}$$



Exercice 5 puis Intégrales de Riemann GeoGebra



Que se passe-t-il pour une intégrale de Riemann en 0 ?

### Propriété - Intégrale de Riemann (2)

L'intégrale impropre  $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$  est convergente si et seulement si  $\alpha < 1$ . Dans ce cas

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1 - \alpha}$$



Exercice 5 puis Intégrales de Riemann GeoGebra

### Propriété - Exponentielle

L'intégrale impropre  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$  est convergente si et seulement si  $\alpha > 0$ . Dans ce cas

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$$



Exercice 6



## Intégrales de In GeoGebra

Intégrale sur un  
intervalle quelconque.

Intégrales de  
références

Propriétés des  
intégrales impropres

Linéarité de l'intégrale

Relation de Chasles

Comparaisons

Convergence absolue.

Intégrale sur un  
intervalle quelconque.

Intégrales de  
références

Propriétés des  
intégrales impropres

Linéarité de l'intégrale

Relation de Chasles

Comparaisons

Convergence absolue.



## Intégrales de In GeoGebra

### Propriété - Logarithme

L'intégrale impropre  $\int_0^1 \ln(t) dt$  est convergente et on a

$$\int_0^1 \ln(t) dt = -1$$



### Exercice 7



## Intégrales de In GeoGebra

### Propriété - Logarithme

L'intégrale impropre  $\int_0^1 \ln(t) dt$  est convergente et on a

$$\int_0^1 \ln(t) dt = -1$$



### Exercice 7

### Propriété - Gaussienne

La fonction  $f : x \rightarrow e^{-x^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$



### Exercice 8

## III - Propriétés des intégrales impropres

### 1) Linéarité de l'intégrale

Intégrale sur un  
intervalle quelconque.

Intégrales de  
références

Propriétés des  
intégrales impropres

**Linéarité de l'intégrale**

Relation de Chasles

Comparaisons

Convergence absolue.

## III - Propriétés des intégrales impropres

### 1) Linéarité de l'intégrale



**Remarque :** Toutes les propriétés vues sur les intégrales sont encore vraies à condition que les intégrales impropres soient convergentes.



*Propriété de linéarité d'une intégrale ?*

## III - Propriétés des intégrales impropres

### 1) Linéarité de l'intégrale



**Remarque :** Toutes les propriétés vues sur les intégrales sont encore vraies à condition que les intégrales impropres soient convergentes.



*Propriété de linéarité d'une intégrale ?*

#### Propriété - Linéarité de l'intégrale

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  deux scalaires.

Si les intégrales généralisées  $\int_I f(t)dt$  et  $\int_I g(t)dt$  convergent, alors  $\int_I (\lambda f(t) + \mu g(t))dt$  converge et

$$\int_I (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_I f(t)dt + \mu \int_I g(t)dt.$$



*Exercice 9*

Intégrale sur un  
intervalle quelconque.

Intégrales de  
références

Propriétés des  
intégrales impropres

Linéarité de l'intégrale

Relation de Chasles

Comparaisons

Convergence absolue.

## 2) Relation de Chasles



*Rappeler la relation de Chasles pour les intégrales.*

## 2) Relation de Chasles



*Rappeler la relation de Chasles pour les intégrales.*

### Propriété - Relation de Chasles

Soient  $a < b$  (finis ou non) et  $f$  une fonction continue sur  $]a, b[$  telle que  $\int_a^b f(t)dt$  converge. Alors, pour tout  $c \in ]a, b[$ , on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Intégrale sur un  
intervalle quelconque.

Intégrales de  
références

Propriétés des  
intégrales impropres

Linéarité de l'intégrale

Relation de Chasles

Comparaisons

Convergence absolue.

### 3) Comparaisons



*Propriété de comparaison pour les séries ?*

### 3) Comparaisons



*Propriété de comparaison pour les séries ?*

#### Propriété - Comparaison

Soient  $a < b$  (finis ou non) et  $f, g$  deux fonctions continues sur  $]a, b[$  telles que  $\forall t \in ]a, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$ . Alors,

- Si  $\int_a^b g(t)dt$  converge alors  $\int_a^b f(t)dt$  converge et, dans ce cas,

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

- Si  $\int_a^b f(t)dt$  diverge alors  $\int_a^b g(t)dt$  diverge.

### 3) Comparaisons



*Propriété de comparaison pour les séries ?*

#### Propriété - Comparaison

Soient  $a < b$  (finis ou non) et  $f, g$  deux fonctions continues sur  $]a, b[$  telles que  $\forall t \in ]a, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$ . Alors,

- Si  $\int_a^b g(t)dt$  converge alors  $\int_a^b f(t)dt$  converge et, dans ce cas,

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

- Si  $\int_a^b f(t)dt$  diverge alors  $\int_a^b g(t)dt$  diverge.



**Remarque :** Attention : il faut absolument que  $f$  soit positive.



*Exercice 10*

Intégrale sur un  
intervalle quelconque.

Intégrales de  
références

Propriétés des  
intégrales impropres

Linéarité de l'intégrale

Relation de Chasles

Comparaisons

Convergence absolue.

## 4) Convergence absolue.



*Comment définir la convergence absolue ?*

## 4) Convergence absolue.



*Comment définir la convergence absolue ?*

### Définition : Convergence absolue

Soient  $a < b$  (finis ou non) et  $f$  une fonction continue sur  $]a, b[$ .  
On dit que l'intégrale  $\int_a^b f(t)dt$  converge absolument sur  $]a, b[$  si  
 $\int_a^b |f(t)|dt$  converge.

## 4) Convergence absolue.



*Comment définir la convergence absolue ?*

### Définition : Convergence absolue

Soient  $a < b$  (finis ou non) et  $f$  une fonction continue sur  $]a, b[$ .  
On dit que l'intégrale  $\int_a^b f(t)dt$  converge absolument sur  $]a, b[$  si  $\int_a^b |f(t)|dt$  converge.



**Remarque :** On dit également que  $f$  est intégrable sur  $]a, b[$  si  $f$  est absolument convergente sur  $]a, b[$ .

## 4) Convergence absolue.



*Comment définir la convergence absolue ?*

### Définition : Convergence absolue

Soient  $a < b$  (finis ou non) et  $f$  une fonction continue sur  $]a, b[$ .

On dit que l'intégrale  $\int_a^b f(t)dt$  converge absolument sur  $]a, b[$  si  $\int_a^b |f(t)|dt$  converge.



**Remarque :** On dit également que  $f$  est intégrable sur  $]a, b[$  si  $f$  est absolument convergente sur  $]a, b[$ .

### Théorème - Convergence absolue

Soient  $a < b$  (finis ou non) et  $f$  une fonction continue sur  $]a, b[$ . Si  $\int_a^b f(t)dt$  est absolument convergente alors elle est convergente et

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$



*Exercice 11*