Chapitre 21: Convexité - Étude de fonctions

Savoir Faire:

- Étudier le caractère $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$ d'une fonction.
- Étudier la convexité d'une fonction
- Étude de fonction.

I - Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.

1) Dérivées successives

Qu'appelle t-on dérivée seconde ?

I - Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.

1) Dérivées successives

Qu'appelle t-on dérivée seconde ?

Définition : Dérivées successives

Soit f définie sur I. Si f est dérivable k fois successivement on note $f^{(k)}$ sa k-ième dérivée. On a

$$f^{(0)} = f,\ f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$$

I - Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.

1) Dérivées successives

Qu'appelle t-on dérivée seconde ?

Définition : Dérivées successives

Soit f définie sur I. Si f est dérivable k fois successivement on note $f^{(k)}$ sa k-ième dérivée. On a

$$f^{(0)} = f,\ f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$$

Remarque : La dérivée seconde est souvent notée f''.

Exercice 1

2) Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Rappeler ce qu'est une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$.

2) Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Rappeler ce qu'est une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$.

Définition : Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Soit n $\in \mathbb{N}$

- On dit que la fonction f est de **classe** $\mathcal{C}^n$ **sur I** si f est n fois dérivable sur I et si et $f^{(n)}$est **continue** sur I.

2) Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Rappeler ce qu'est une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$.

Définition : Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Soit n $\in \mathbb{N}$

- On dit que la fonction f est de **classe $\mathcal{C}^n$ sur I** si f est n fois dérivable sur I et si et $f^{(n)}$est **continue** sur I.
- On dit que la fonction f est de **classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I** si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout entier k c'est à dire si f est **indéfiniment dérivable**.

2) Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Rappeler ce qu'est une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$.

Définition : Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Soit n $\in \mathbb{N}$

- On dit que la fonction f est de **classe $\mathcal{C}^n$ sur I** si f est n fois dérivable sur I et si et $f^{(n)}$est **continue** sur I.
- On dit que la fonction f est de **classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I** si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout entier k c'est à dire si f est **indéfiniment dérivable**.

Remarque : $\mathcal{C}^n(I)$ est l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^n$.

Exercice 2

3) Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Propriété - Opérations

Les **sommes, combinaisons linéaires, produits, quotients** bien définis, composées de fonctions **n fois dérivables** (respectivement de **classe** C^n) , avec n un entier naturel, sont encore des fonctions **n fois dérivables** (respectivement de **classe** C^n). Cette proposition s'étend aux fonctions de classe C^∞

3) Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Propriété - Opérations

Les **sommes, combinaisons linéaires, produits, quotients** bien définis, composées de fonctions **n fois dérivables** (respectivement de **classe** C^n) , avec n un entier naturel, sont encore des fonctions **n fois dérivables** (respectivement de **classe** C^n). Cette proposition s'étend aux fonctions de classe C^∞

Remarque : Toutes les fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, puissances, ...) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition sauf :

- la fonction valeur absolue , qui est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ mais pas sur $\mathbb{R}$
- la fonction racine carrée, qui est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 3

II - Convexité et point d'inflexion

1) Définition, interprétation graphique

Quelles fonctions sont convexes ? Concaves ?

II - Convexité et point d'inflexion

1) Définition, interprétation graphique

Quelles fonctions sont convexes ? Concaves ?

Définition : Segment

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ alors le segment $[a, b]$ peut être décrit par :

$$[a, b] = \{ta + (1-t)b, t \in [0, 1]\}.$$

Segment GeoGebra

II - Convexité et point d'inflexion

1) Définition, interprétation graphique

Quelles fonctions sont convexes ? Concaves ?

Définition : Segment

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ alors le segment $[a, b]$ peut être décrit par :

$$[a, b] = \{ta + (1-t)b, t \in [0, 1]\}.$$

Segment GeoGebra

Définition : fonction convexe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que la fonction f est **convexe sur I** si :

$$\forall (a, b) \in I^2,\ \forall t \in [0, 1]\ ,\ f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

Convexité GeoGebra

Remarque : f est convexe si et seulement si sa courbe représentative est en dessous de ses cordes.

Remarque : f est convexe si et seulement si sa courbe représentative est en dessous de ses cordes.

Remarque : Si on a

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \forall t \in [0,1]\,,\ f(ta+(1-t)b) \geq tf(a)+(1-t)f(b)$$

la fonction est dite concave.

Concavité GeoGebra

Remarque : f est convexe si et seulement si sa courbe représentative est en dessous de ses cordes.

Remarque : Si on a

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \forall t \in [0,1]\ ,\ f(ta+(1-t)b) \geq tf(a)+(1-t)f(b)$$

la fonction est dite concave.

Concavité GeoGebra

Remarque :

- f convexe $\Longleftrightarrow -f$ concave.
- Si f est bijective, f convexe $\Leftrightarrow f^{-1}$ concave

Montrer en raisonnant par équivalent que $f(x) = x^2$ est convexe sur tout intervalle $[a,b]$.

Définition : Point d'inflexion

On appelle **point d'inflexion** d'une courbe représentative un point où la courbure de la courbe change. C'est à dire où la fonction passe de concave à convexe ou inversement.

Définition : Point d'inflexion

On appelle **point d'inflexion** d'une courbe représentative un point où la courbure de la courbe change. C'est à dire où la fonction passe de concave à convexe ou inversement.

Exemple -

La courbe représentative de la fonction cube admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0

Définition : Point d'inflexion

On appelle **point d'inflexion** d'une courbe représentative un point où la courbure de la courbe change. C'est à dire où la fonction passe de concave à convexe ou inversement.

Exemple -

La courbe représentative de la fonction cube admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0

Remarque : Si la courbe admet un point d'inflexion alors ce n'est pas un extremum local

Fonction cube GeoGebra

2) Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Lien entre fonction $\mathcal{C}^1$ et convexité

2) Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Lien entre fonction $\mathcal{C}^1$ et convexité

Propriété - Convexité et fonctions $\mathcal{C}^1$

Soit f une fonction **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique. f est convexe (respectivement. concave) sur I si et seulement si l'une de ces deux propositions est vérifiée :
(i) f' est croissante (respectivement décroissante) sur I
(ii) $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes (respectivement en dessous)

Tangente GeoGebra

3) Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Lien entre fonction $\mathcal{C}^2$ et convexité

3) Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Lien entre fonction $\mathcal{C}^2$ et convexité

Propriété - Convexité et fonctions $\mathcal{C}^2$

Soit f une fonction **de classe** $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I.
f convexe (respectivement concave) sur I $\Longleftrightarrow$ $f\,''$ est positive (respectivement négative) sur I.

3) Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Lien entre fonction $\mathcal{C}^2$ et convexité

Propriété - Convexité et fonctions $\mathcal{C}^2$

Soit f une fonction **de classe** $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I.
f convexe (respectivement concave) sur I $\iff$ f'' est positive (respectivement négative) sur I.

Remarque : En général, on montre qu'une fonction est convexe (ou concave) pour pouvoir la tracer plus précisément et pour obtenir des inégalités .

Exercice 4 et Exercice 5

Propriété - Points d'inflexions et fonctions $\mathcal{C}^2$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et x_0 un point de I qui n'est pas une extrémité de l'intervalle. Alors le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x_0 est un point d'inflexion si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en x_0

Exercice 6

III - Étude complète de fonction

Nous utiliserons la fonction de l'exercice 13 de la feuille de TD dans toute cette partie, à savoir,

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1) Études préliminaires

Domaine de définition

Le domaine de définition est souvent donné. Mais dans le cas contraire,

1. On vérifie que toute expression du dénominateur est différente de 0.
2. On vérifie que toute expression dans une racine est supérieure ou égale à 0.
3. On vérifie que toute expression dans un logarithme est strictement supérieure à 0.

Étudier la parité

1. On vérifie que le domaine de définition est symétrique.
2. On calcule $f(-x)$.

Remarque : Si la fonction est paire, la courbe sera symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Si la fonction est impaire, la courbe sera symétrique par rapport à l'origine.

Étudier la continuité, le caractère $\mathcal{C}^1$

1. Déterminer les points problématiques.
2. Calculer les limites pour montrer la continuité
3. Calculer la limite du taux d'accroissement pour le caractère $\mathcal{C}^1$

2) Tableau de variation

Étudier les variations

1. Montrer que la fonction est dérivable sur l'ensemble de définition.
2. Calculer la dérivée.
3. Étudier le signe de la dérivée

Déterminer les limites

Déterminer les limites de la fonctions aux bords de l'ensemble de définition.

1. Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$, on a une asymptote horizontale à la courbe en l'infini.
2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, on a une asymptote verticale à la courbe en $x = a$.

Tracer le tableau de Variation

Tracer le tableau en y apportant tout éléments utiles pour le tracé de la courbe.

3) Tracé de courbe

Equation de la tangente

Définition de l'équation de la tangente

Convexité de la courbe

1. Montrer que la fonction est de classe $\mathcal{C}^2$.
2. Calculer la dérivée seconde.
3. Étudier le signe de la dérivée seconde.

Tracé de courbe

1. On trace les asymptotes
2. On trace les tangentes et les tangentes verticales.
3. On met les points utilisés dans le tableau de variation.
4. On fait attention aux points particuliers, à la convexité, à la parité.

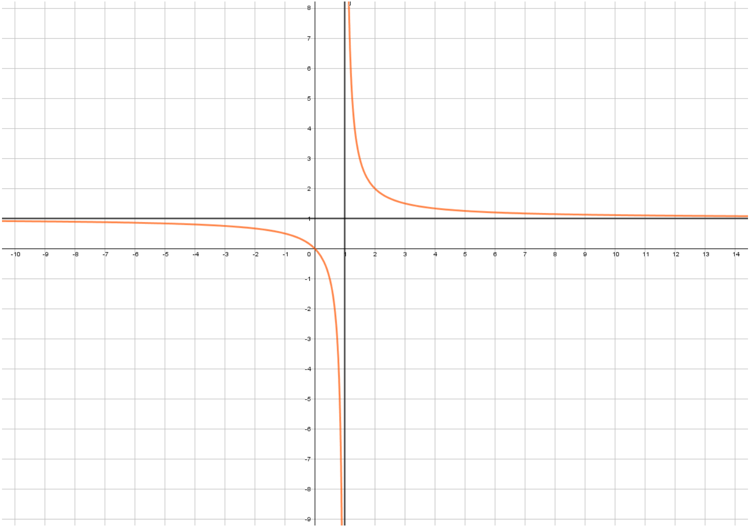

Figure – Asymptotes verticale et horizontale

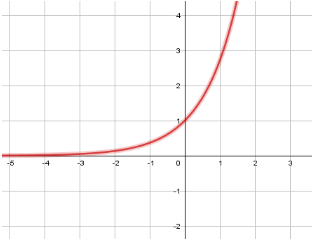

Figure – Fonction convexe

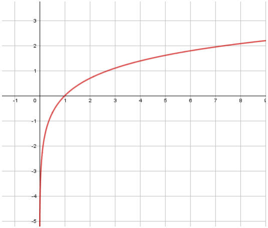

Figure – Fonction concave

tangente horizontale

Point ou la dérivée de la fonction est nulle.

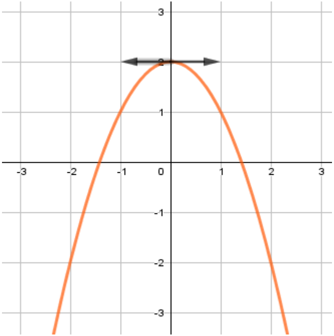

Figure – Tangente horizontale

Point d'inflexion

Changement de convexité. La dérivée seconde de la fonction doit être nulle.

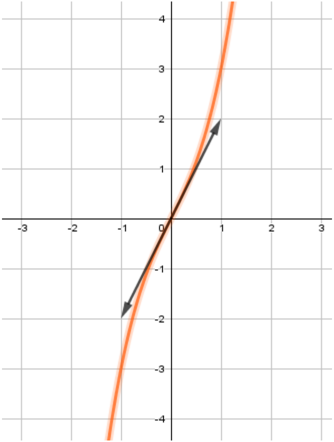

Figure – Point d'inflexion

Point anguleux

Point ou il y a deux demi-tangentes

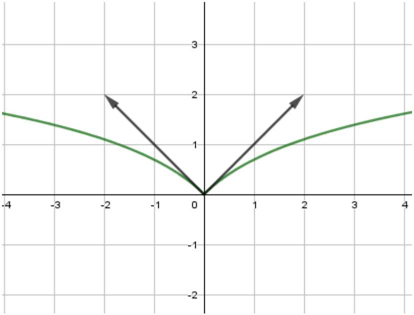

Figure – Point anguleux

Point Rebroussement

Point ou la tangente est verticale (la limite de la dérivée est $\pm\infty$).

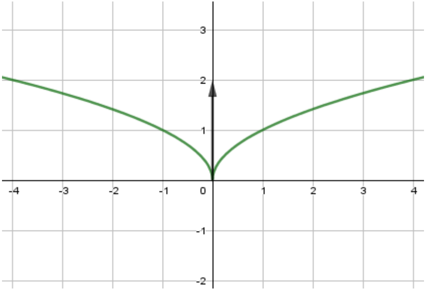

Figure – Point de rebroussement