

# Chapitre 20: Variable aléatoires discrètes

M Leboucher

## Savoir Faire:

- Déterminer une loi de probabilité discrète.
- Calculer l'espérance ou la variance.
- Loi géométrique et loi de Poisson.
- Étude des suites de variables aléatoires.



## Exercice 1

# I - Variable aléatoire

## 1) Complément sur les variables aléatoires

### Définition : Variable aléatoire

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire sur  $\Omega$  toute application  $X$  de  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \{\omega \in \Omega, / X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

## I - Variable aléatoire

### 1) Complément sur les variables aléatoires

#### Définition : Variable aléatoire

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire sur  $\Omega$  toute application  $X$  de  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \{\omega \in \Omega, / X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$



**Remarque :** Une VA est une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

# I - Variable aléatoire

## 1) Complément sur les variables aléatoires

### Définition : Variable aléatoire

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire sur  $\Omega$  toute application  $X$  de  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \{\omega \in \Omega, / X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$



**Remarque :** Une VA est une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .



**Remarque :** Nous parlerons en général de variable aléatoire sans forcément préciser réelle




# I - Variable aléatoire

## 1) Complément sur les variables aléatoires

### Définition : Variable aléatoire

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire sur  $\Omega$  toute application  $X$  de  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \{\omega \in \Omega, / X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

-  **Remarque :** Une VA est une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .
-  **Remarque :** Nous parlerons en général de variable aléatoire sans forcément préciser réelle
-  **Remarque :** Si  $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$  où  $I$  est une partie finie ou infinie de  $\mathbb{N}$  ou de  $\mathbb{Z}$ , la variable aléatoire est discrète. Sinon, elle est à densité.



*Donnez des exemples de variables aléatoires*

## Définition : Notations

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ . On note pour simplifier les évènements :

- $(X = x) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\}$

## Définition : Notations

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ . On note pour simplifier les évènements :

- $(X = x) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\}$
- $(X \leq x) = \{w \in \Omega / X(w) \leq x\}$

## Définition : Notations

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ . On note pour simplifier les évènements :

- $(X = x) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\}$
- $(X \leq x) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\}$
- Pour  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $(X \in A) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}$ .



### Exercice 2

## Définition : Notations

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ . On note pour simplifier les évènements :

- $(X = x) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\}$
- $(X \leq x) = \{w \in \Omega / X(w) \leq x\}$
- Pour  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $(X \in A) = \{x \in \Omega, X(\omega) \in A\}$ .



### Exercice 2

## Propriété - Opérations sur des VA

*Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et  $\lambda$  un nombre réel. Alors  $X + Y$ ,  $\lambda X$ ,  $X \times Y$ ,  $\max(X, Y)$ ,  $\min(X, Y)$  sont des variables aléatoires réelles discrètes définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .*



### Exercice 3



## Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

## Formule des probabilités totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

## Fonction de répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

## Paramètres d'une variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

## Loi usuelle discrètes infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson



## 2) Formule des probabilités totales

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

**Formule des probabilités  
totales**

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson



Que dire des  $(X = i)$  pour tous les  $i \in X(\Omega)$  ?

## 2) Formule des probabilités totales

Propriété - Système complet associé à  $X$

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé et  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ . Alors les évènements  $(X = i)_{i \in X(\Omega)}$  forment un système complet d'évènement. On l'appelle système complet associé à  $X$ .

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson



Que dire des  $(X = i)$  pour tous les  $i \in X(\Omega)$  ?

## 2) Formule des probabilités totales

Propriété - Système complet associé à  $X$

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé et  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ . Alors les évènements  $(X = i)_{i \in X(\Omega)}$  forment un système complet d'évènement. On l'appelle système complet associé à  $X$ .



**Remarque :** Cela signifie que  $\sum_{i \in X(\Omega)} P(X = i) = 1$  et si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ alors on a } \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = i) = 1$$



Que dire des  $(X = i)$  pour tous les  $i \in X(\Omega)$  ?

## 2) Formule des probabilités totales

### Propriété - Système complet associé à $X$

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé et  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ . Alors les évènements  $(X = i)_{i \in X(\Omega)}$  forment un système complet d'évènement. On l'appelle système complet associé à  $X$ .



**Remarque :** Cela signifie que  $\sum_{i \in X(\Omega)} P(X = i) = 1$  et si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ alors on a } \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = i) = 1$$

### Théorème - Formule des probabilités totales pour une VA

Soit  $X$  une VA discrète définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Soit  $A \in \mathcal{A}$ , alors

$$P(A) = \sum_{k \in X(\Omega)} P(A \cap X = k) = \sum_{k \in X(\Omega)} P_{(X=k)}(A)P(X = k)$$



Exercice 4

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson

### 3) Transformation d'une variable aléatoire discrète

### 3) Transformation d'une variable aléatoire discrète

#### Définition : Transformation d'une VA

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et  $g$  une application de  $X(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$ . L'application

$$Y : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow \mathbb{R} \\ w & \longmapsto g(X(w)) \end{cases}$$

est une variable aléatoire notée  $g(X)$ .


### 3) Transformation d'une variable aléatoire discrète

#### Définition : Transformation d'une VA

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et  $g$  une application de  $X(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$ . L'application

$$Y : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow \mathbb{R} \\ w & \longmapsto g(X(w)) \end{cases}$$

est une variable aléatoire notée  $g(X)$ .

 **Remarque :**  $g(X)$  est en fait la composée  $g \circ X$  définie sur  $\Omega$  par  $g \circ X(\omega) = g(X(\omega))$


### 3) Transformation d'une variable aléatoire discrète


#### Définition : Transformation d'une VA

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et  $g$  une application de  $X(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$ . L'application

$$Y : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow \mathbb{R} \\ w & \longmapsto g(X(w)) \end{cases}$$

est une variable aléatoire notée  $g(X)$ .

 **Remarque :**  $g(X)$  est en fait la composée  $g \circ X$  définie sur  $\Omega$  par  $g \circ X(\omega) = g(X(\omega))$

 **Remarque :** On se servira notamment de la transformation pour le calcul de  $X^2$  (et donc de la variance).



#### Exercice 5

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

**Rappel sur la loi de  
probabilité**

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson

## II - Fonction de répartition d'une VA

### 1) Rappel sur la loi de probabilité

## II - Fonction de répartition d'une VA

### 1) Rappel sur la loi de probabilité

#### Définition : Loi


On appelle **loi d'une VA** de la variable aléatoire discrète  $X$  (ou **loi de probabilité de  $X$**  ou **distribution de  $X$** ) la donnée de  $P(X = x_i)$  pour tout  $x_i \in X(\Omega)$ .


## II - Fonction de répartition d'une VA

### 1) Rappel sur la loi de probabilité

#### Définition : Loi

On appelle **loi d'une VA** de la variable aléatoire discrète  $X$  (ou **loi de probabilité de  $X$**  ou **distribution de  $X$** ) la donnée de  $P(X = x_i)$  pour tout  $x_i \in X(\Omega)$ .

 **Remarque :** S'il y a peu d'éléments dans  $X(\Omega)$ , on représente la loi de  $X$  dans un tableau


 **Remarque :** Lorsque  $X$  prend une infinité de valeurs (ou de nombreuses valeurs), il est évidemment difficile de présenter la loi de  $X$  sous la forme d'un tableau. On préfère dans ce cas écrire, lorsque c'est possible, une formule pour  $P(X = x_k)$


## II - Fonction de répartition d'une VA

### 1) Rappel sur la loi de probabilité

#### Définition : Loi

On appelle **loi d'une VA** de la variable aléatoire discrète  $X$  (ou **loi de probabilité de  $X$**  ou **distribution de  $X$** ) la donnée de  $P(X = x_i)$  pour tout  $x_i \in X(\Omega)$ .

 **Remarque :** S'il y a peu d'éléments dans  $X(\Omega)$ , on représente la loi de  $X$  dans un tableau

 **Remarque :** Lorsque  $X$  prend une infinité de valeurs (ou de nombreuses valeurs), il est évidemment difficile de présenter la loi de  $X$  sous la forme d'un tableau. On préfère dans ce cas écrire, lorsque c'est possible, une formule pour  $P(X = x_k)$



#### Déterminer la loi d'une variable aléatoire $X$

- 1 Déterminer les valeurs prises par  $X$ , c'est à dire déterminer  $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$
- 2 Déterminer les probabilités corresp.  $p_i = P(X = x_i)$ .



#### Exercice 6

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

**Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire**

Paramètres d'une  
variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson

## 2) Fonction de répartition d'une variable aléatoire

## 2) Fonction de répartition d'une variable aléatoire

### Définition : Fonction de répartition

On appelle **fonction de répartition de la variable aléatoire discrète  $X$**  la fonction réelle notée  $F_X$  définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = P(X \leq t).$$



**Remarque :** En statistique, la fonction de répartition correspondrait à la fréquence des effectifs cumulés croissants.




### Exercice 7

## 2) Fonction de répartition d'une variable aléatoire

### Définition : Fonction de répartition


On appelle **fonction de répartition de la variable aléatoire discrète  $X$**  la fonction réelle notée  $F_X$  définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = P(X \leq t).$$

 **Remarque :** En statistique, la fonction de répartition correspondrait à la fréquence des effectifs cumulés croissants.



### Exercice 7

 **Remarque :** Lorsque la variable aléatoire  $X$  est discrète, sa fonction de répartition est une fonction constante par morceau.

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson



## Propriétés de la fonction de répartition ?

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson



## Propriétés de la fonction de répartition ?

### Propriété - Fonction de répartition

Soient  $X$  une variable aléatoire discrète et  $F_X$  sa fonction de répartition. Alors :

- $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(t) \leq 1.$

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson



## Propriétés de la fonction de répartition ?

### Propriété - Fonction de répartition

Soient  $X$  une variable aléatoire discrète et  $F_X$  sa fonction de répartition. Alors :

- $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(t) \leq 1.$
- la fonction  $F_X$  est croissante sur  $\mathbb{R}.$

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson



## Propriétés de la fonction de répartition ?

### Propriété - Fonction de répartition

Soient  $X$  une variable aléatoire discrète et  $F_X$  sa fonction de répartition. Alors :

- $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(t) \leq 1.$
- la fonction  $F_X$  est croissante sur  $\mathbb{R}.$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1.$

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson



## Propriétés de la fonction de répartition ?

### Propriété - Fonction de répartition

Soient  $X$  une variable aléatoire discrète et  $F_X$  sa fonction de répartition. Alors :

- $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(t) \leq 1.$
- la fonction  $F_X$  est croissante sur  $\mathbb{R}.$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1.$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } a < b, P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson



## Propriétés de la fonction de répartition ?

### Propriété - Fonction de répartition

Soient  $X$  une variable aléatoire discrète et  $F_X$  sa fonction de répartition. Alors :

- $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(t) \leq 1.$
- la fonction  $F_X$  est croissante sur  $\mathbb{R}.$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1.$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } a < b, P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$
- la fonction  $F_X$  est continue à droite en tout point



## Preuve de la proposition

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson

## Propriété - Fonction de répartition et loi

Soient  $X$  une variable aléatoire discrète et  $F_X$  sa fonction de répartition. On suppose que  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  avec  $x_1 < x_2 < x_3 \dots$ . Alors, pour tout entier  $i \geq 2$  :

$$P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$$

## Propriété - Fonction de répartition et loi

Soient  $X$  une variable aléatoire discrète et  $F_X$  sa fonction de répartition. On suppose que  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  avec  $x_1 < x_2 < x_3 \dots$ . Alors, pour tout entier  $i \geq 2$  :

$$P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$$



**Remarque :** Cette proposition permet donc de définir la loi d'une variable  $X$  à partir de sa fonction de répartition. On a donc ce résultat très important qui dit que la loi d'une VA discrète est entièrement déterminée par la donnée de sa fonction de répartition.



### Exercice 8

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

**Espérance**

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson

## III - Paramètres d'une variable aléatoire

### 1) Espérance



*Comment calcule-t-on une espérance ?*

## III - Paramètres d'une variable aléatoire

### 1) Espérance



*Comment calcule-t-on une espérance ?*

#### Définition : Espérance d'une variable aléatoire

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète. Si la série

$\sum_{k \in X(\Omega)} k P(X = k)$  est absolument convergente, on dira que  $X$

admet une espérance notée  $E(X)$  et on a

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

**Espérance**

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson



## Remarque :

- Puisque l'espérance est définie sous condition de convergence d'une certaine série, cette dernière n'existe pas forcément !

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

**Espérance**

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson



## Remarque :

- Puisque l'espérance est définie sous condition de convergence d'une certaine série, cette dernière n'existe pas forcément !
- On parle aussi de moyenne à la place d'espérance.

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

**Espérance**

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson



## Remarque :

- Puisque l'espérance est définie sous condition de convergence d'une certaine série, cette dernière n'existe pas forcément !
- On parle aussi de moyenne à la place d'espérance.
- Si  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ , sous réserve de convergence de la série, on a

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k).$$

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson



## Remarque :

- Puisque l'espérance est définie sous condition de convergence d'une certaine série, cette dernière n'existe pas forcément !
- On parle aussi de moyenne à la place d'espérance.
- Si  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ , sous réserve de convergence de la série, on a

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k).$$

- Dans le cas où la variable aléatoire est **finie**, son espérance existe toujours car la série est en fait une somme finie de réels.



## Exercice 9



*Les propriétés suivantes sont des rappels.*

### Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

### Fonction de répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

### Paramètres d'une variable aléatoire

#### Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

### Loi usuelle discrètes infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson

Variable aléatoire

Complément sur les variables aléatoires

Formule des probabilités totales

Transformation d'une variable aléatoire discrète

Fonction de répartition d'une VA

Rappel sur la loi de probabilité

Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Paramètres d'une variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson



*Les propriétés suivantes sont des rappels.*

Propriété - Bornes de l'espérance

Si  $X(\Omega) \subset [p, q]$  et  $X$  admet une espérance alors  $p \leq E(X) \leq q$ .



**Remarque :** Notamment, si  $X$  est positive,  $E(X) \geq 0$



*Les propriétés suivantes sont des rappels.*

### Propriété - Bornes de l'espérance

Si  $X(\Omega) \subset [p, q]$  et  $X$  admet une espérance alors  $p \leq E(X) \leq q$ .



**Remarque :** Notamment, si  $X$  est positive,  $E(X) \geq 0$

### Propriété - Linéarité de l'espérance

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  admettant une espérance et  $a, b$  deux réels. Alors  $aX + b$  et  $X + Y$  admettent une espérance et

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$



*Les propriétés suivantes sont des rappels.*

### Propriété - Bornes de l'espérance

Si  $X(\Omega) \subset [p, q]$  et  $X$  admet une espérance alors  $p \leq E(X) \leq q$ .



**Remarque :** Notamment, si  $X$  est positive,  $E(X) \geq 0$

### Propriété - Linéarité de l'espérance

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  admettant une espérance et  $a, b$  deux réels. Alors  $aX + b$  et  $X + Y$  admettent une espérance et

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

### Définition : Variable aléatoire centrée

Toute variable aléatoire admettant une espérance nulle est dite centrée.



*Exercice 10*

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson

## 2) Formule de transfert



*Comment calculer  $E(X^2)$  ?*

## 2) Formule de transfert



*Comment calculer  $E(X^2)$  ?*

### Théorème - Formule de transfert

Soit  $X$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et  $g$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . L'espérance de  $g(X)$  existe si et seulement si la série  $\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$  est absolument convergente et alors

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$$

## 2) Formule de transfert



*Comment calculer  $E(X^2)$  ?*

### Théorème - Formule de transfert

Soit  $X$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et  $g$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . L'espérance de  $g(X)$  existe si et seulement si la série  $\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$  est absolument convergente et alors

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$$



**Remarque :** Dans le cas où  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et que l'espérance existe, on a  $E(g(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)P(X = k)$ .



*Exercice 11*

## 3) Moments d'une variable aléatoire discrète

### Variable aléatoire

Complément sur les variables aléatoires

Formule des probabilités totales

Transformation d'une variable aléatoire discrète

### Fonction de répartition d'une VA

Rappel sur la loi de probabilité

Fonction de répartition d'une variable aléatoire

### Paramètres d'une variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

**Moments d'une variable aléatoire discrète**

Variance

### Loi usuelle discrètes infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson

### 3) Moments d'une variable aléatoire discrète

Variable aléatoire

Complément sur les variables aléatoires

Formule des probabilités totales

Transformation d'une variable aléatoire discrète

Fonction de répartition d'une VA

Rappel sur la loi de probabilité

Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Paramètres d'une variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson

#### Définition : Moments d'ordre $r$

Soit  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $X$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Si la série  $\sum_{x \in X(\Omega)} x^p P(X = x)$  est

absolument convergente alors on dit que la variable aléatoire  $X$  admet un **moment d'ordre  $p$**  et on a

$$m_p(X) = E(X^p) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^p P(X = x).$$

### 3) Moments d'une variable aléatoire discrète

#### Définition : Moments d'ordre $r$

Soit  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $X$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Si la série  $\sum_{x \in X(\Omega)} x^p P(X = x)$  est

absolument convergente alors on dit que la variable aléatoire  $X$  admet un **moment d'ordre  $p$**  et on a

$$m_p(X) = E(X^p) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^p P(X = x).$$



#### Remarque :

- Toute variable aléatoire discrète finie admet des moments à tous les ordres  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

### 3) Moments d'une variable aléatoire discrète

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson

#### Définition : Moments d'ordre $r$

Soit  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $X$  une variable aléatoire sur un espace  
probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Si la série  $\sum_{x \in X(\Omega)} x^p P(X = x)$  est

absolument convergente alors on dit que la variable aléatoire  $X$   
admet un **moment d'ordre  $p$**  et on a

$$m_p(X) = E(X^p) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^p P(X = x).$$



#### Remarque :

- Toute variable aléatoire discrète finie admet des moments à tous les ordres  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .
- Le moment d'ordre 1 d'une VA  $X$  est son espérance  $E(X)$ .

### 3) Moments d'une variable aléatoire discrète

#### Définition : Moments d'ordre $r$

Soit  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $X$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Si la série  $\sum_{x \in X(\Omega)} x^p P(X = x)$  est

absolument convergente alors on dit que la variable aléatoire  $X$  admet un **moment d'ordre  $p$**  et on a

$$m_p(X) = E(X^p) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^p P(X = x).$$



#### Remarque :

- Toute variable aléatoire discrète finie admet des moments à tous les ordres  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .
- Le moment d'ordre 1 d'une VA  $X$  est son espérance  $E(X)$ .
- Si  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ ,  $E[X^p] = \sum_{k \in \mathbb{N}} k^p P(X = k)$ .



#### Exercice 12

## 4) Variance



*Quel est la variance d'une VA, l'écart type ?*

### Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

### Fonction de répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

### Paramètres d'une variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

### Variance

### Loi usuelle discrètes infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson

## 4) Variance



Quel est la variance d'une VA, l'écart type ?

### Définition : Variance

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  admettant un moment d'ordre 2. On appelle **variance** de  $X$  le nombre mesurant l'écart entre  $X$  et son espérance

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2].$$

On appelle alors **écart-type** de  $X$  le nombre

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}.$$

## 4) Variance



Quel est la variance d'une VA, l'écart type ?

### Définition : Variance

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  admettant un moment d'ordre 2. On appelle **variance** de  $X$  le nombre mesurant l'écart entre  $X$  et son espérance

$$\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2].$$

On appelle alors **écart-type** de  $X$  le nombre

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

### Théorème - Formule de Koenig-Huygens

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  admettant un moment d'ordre 2. On a

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

**Variance**

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson



Que dire de  $Var(aX + b)$  ?

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson



Que dire de  $Var(aX + b)$  ?

Propriété -

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $aX + b$  admet une variance et on a

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X).$$

Variable aléatoire

Complément sur les variables aléatoires

Formule des probabilités totales

Transformation d'une variable aléatoire discrète

Fonction de répartition d'une VA

Rappel sur la loi de probabilité

Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Paramètres d'une variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson



Que dire de  $Var(aX + b)$  ?

Propriété -

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $aX + b$  admet une variance et on a

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X).$$

Définition : Variable aléatoire réduite

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  admettant un moment d'ordre 2. On dit que  $X$  est réduite si  $\sigma(X) = Var(X) = 1$ .



Exercice 13

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson

## IV - Loi usuelle discrètes infinies

### 1) Loi géométrique



*Reprendre l'exercice 1. Quelle était la loi de  $X$  ?*

## IV - Loi usuelle discrètes infinies

### 1) Loi géométrique



*Reprendre l'exercice 1. Quelle était la loi de  $X$  ?*

#### Définition : Loi géométrique

Soit  $p \in ]0; 1[$ . On pose  $q = 1 - p$  On dit qu'une variable aléatoire réelle  $X$  suit **la loi géométrique de paramètre  $p$** , notée  $\mathcal{G}(p)$ , lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = pq^{k-1}$$

## IV - Loi usuelle discrètes infinies

### 1) Loi géométrique



*Reprendre l'exercice 1. Quelle était la loi de  $X$  ?*

#### Définition : Loi géométrique

Soit  $p \in ]0; 1[$ . On pose  $q = 1 - p$ . On dit qu'une variable aléatoire réelle  $X$  suit **la loi géométrique de paramètre  $p$** , notée  $\mathcal{G}(p)$ , lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = pq^{k-1}$$

#### Exemple - Modélisation de la loi géométrique

La loi géométrique correspond à l'obtention du premier succès lorsqu'une épreuve de Bernoulli se répète de manière indépendante.



*Exercice 14*

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson

## Théorème - Espérance et Variance de la loi géométrique

Si  $X$  suit la loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ , alors  $X$  admet une espérance

$$E(X) = \frac{1}{p} \text{ et une variance } V(X) = \frac{q}{p^2}.$$



### Démonstration du théorème

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson

## 2) Loi de Poisson



La loi de Poisson permet de modéliser durant un temps  $t$  la réalisation d'événements dont la probabilité de se réaliser est très petite. Par exemple des séismes sur un temps long, des taux de pannes d'appareils électriques etc... Mais aussi en finance, pour mesurer la probabilité de défaut d'un crédit. Le paramètre  $\lambda$  fait varier la manière dont apparaissent ces événements.

## 2) Loi de Poisson



La loi de Poisson permet de modéliser durant un temps  $t$  la réalisation d'événements dont la probabilité de se réaliser est très petite. Par exemple des séismes sur un temps long, des taux de pannes d'appareils électriques etc... Mais aussi en finance, pour mesurer la probabilité de défaut d'un crédit. Le paramètre  $\lambda$  fait varier la manière dont apparaissent ces événements.

### Définition : Loi de Poisson

Soit  $\lambda > 0$ . On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit **la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$** , notée  $\mathcal{P}(\lambda)$ , lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$



### Exercice 15

Variable aléatoire

Complément sur les  
variables aléatoires

Formule des probabilités  
totales

Transformation d'une  
variable aléatoire discrète

Fonction de  
répartition d'une VA

Rappel sur la loi de  
probabilité

Fonction de répartition  
d'une variable aléatoire

Paramètres d'une  
variable aléatoire

Espérance

Formule de transfert

Moments d'une variable  
aléatoire discrète

Variance

Loi usuelle discrètes  
infinies

Loi géométrique

Loi de Poisson

## Propriété - Espérance et variance de la loi de poisson

Si  $X$  suit la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$ , alors  $X$  admet une espérance  $E(X) = \lambda$  et une variance  $V(X) = \lambda$ .



*Démontrer cette proposition*