Chapitre 2
Généralités sur les fonctions

Savoir Faire:

- Composer une fonction.
- Déterminer la parité d'une fonction.
- Trouver un minorant ou un majorant.
- Résoudre une inéquation.
- Calculer des limites sans formes indéterminées.
- Étudier une fonction

I - Propriétés des fonctions

I - Propriétés des fonctions

1) Opérations sur les fonctions.

I - Propriétés des fonctions

1) Opérations sur les fonctions.

Définition : Opérations de fonctions

Soient f et g 2 fonctions d'un ensemble de définition $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$.

1. La fonction somme $f+g$ est défini par

$$f+g : x \in \mathcal{D} \to f(x)+g(x).$$

2. La fonction produit fg est défini par

$$fg : x \in \mathcal{D} \to f(x)\times g(x).$$

3. Si pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $g(x) \neq 0$ alors la fonction quotient $\frac{f}{g}$ est définie par

$$\frac{f}{g} : x \in \mathcal{D} \to \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Fonctions composées et Exercice 1

2) Parité, imparité.

2) Parité, imparité.

Définition : Fonction paire

Une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f$ est dite paire si :

- $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f$ (Domaine de définition symétrique par rapport à 0).
- $\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(-x) = f(x)$.

2) Parité, imparité.

Définition : Fonction paire

Une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f$ est dite paire si :

- $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f$ (Domaine de définition symétrique par rapport à 0).
- $\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(-x) = f(x)$.

Définition : Fonction impaire

Une fonction f est dite impaire si :

- $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f$.
- $\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(-x) = -f(x)$.

2) Parité, imparité.

Définition : Fonction paire

Une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f$ est dite paire si :

- $\forall x \in \mathcal{D}_f, \ -x \in \mathcal{D}_f$ (Domaine de définition symétrique par rapport à 0).
- $\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(-x) = f(x)$.

Définition : Fonction impaire

Une fonction f est dite impaire si :

- $\forall x \in \mathcal{D}_f, \ -x \in \mathcal{D}_f$.
- $\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(-x) = -f(x)$.

Remarque : f est paire (resp. impaire) si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (resp. à l'origine).

Exemples de fonctions paires ou impaires

Déterminer si une fonction est paire, impaire, sans parité

- Pour déterminer la parité d'une fonction, on procède en 2 étapes
  1. On vérifie que le domaine de définition est bien symétrique par rapport à 0.
  2. On prend x dans $\mathcal{D}_f$, on calcule $f(-x)$ et on essaie de retrouver $f(x)$ ou $-f(x)$.
- Pour démontrer qu'une fonction n'a pas de parité, on exhibe un contre-exemple : On cherche 2 nombres réels $x \in \mathcal{D}_f$ et $y \in \mathcal{D}_f$ tels que $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-y) \neq -f(y)$.

Montrer à l'aide d'un contre exemple que la fonction $P : x \to x^2 + x$ n'a pas de parité puis Exercice 2

3) Majorant-Minorant

3) Majorant-Minorant

Reprenons la fonction prix de vente $p(x) = 115 - 4\sqrt{x}$. Pour x compris entre 9 et 300, on peut vérifier que cette fonction est toujours plus grande que 0 (ce qui est sensé !). On dit alors que 0 est un minorant de la fonction p.

3) Majorant-Minorant

Reprenons la fonction prix de vente $p(x) = 115 - 4\sqrt{x}$. Pour x compris entre 9 et 300, on peut vérifier que cette fonction est toujours plus grande que 0 (ce qui est sensé !). On dit alors que 0 est un minorant de la fonction p.

Définition : Majorant - Minorant

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f est dite majorée (resp. minorée) sur I s'il existe un nombre réel M (resp. m) tel que :

  $$\forall x \in I, \quad f(x) \leq M \quad \text{(resp.} \quad f(x) \geq m).$$

  M (resp. m) est un majorant (resp. un minorant) de f sur I.
- f est dite bornée sur I si elle est à la fois majorée et minorée.

Exercice 3

II - Tableaux de variations

1) Sens de variation

II - Tableaux de variations

1) Sens de variation

Définition : Monotonie d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- On dit que f est croissante sur I si, pour tous nombres $x, y \in I$, on a

$$\text{Si } x < y \text{ alors } f(x) \leq f(y)$$

- On dit que f est décroissante sur I si, pour tous nombres $x, y \in I$, on a

$$\text{Si } x < y \text{ alors } f(x) \geq f(y)$$

Remarque : On utilisera plutôt cette définition pour résoudre des inégalités plus que pour montrer qu'une fonction est croissante.

Exercice 4

Remarque : Une fonction croissante conserve l'ordre d'une inégalité alors qu'une fonction décroissante le modifie.

Remarque : Une fonction croissante conserve l'ordre d'une inégalité alors qu'une fonction décroissante le modifie.

Remarque : On peut également définir la croissance (resp. la décroissance) stricte d'une fonction. On dit que f est strictement croissante (resp. décroissante) ssi pour tout $u, v, \in I$ tels que $u < v$, on a $f(u) < f(v)$ (resp. $f(u) > f(v)$).

Remarque : Une fonction croissante conserve l'ordre d'une inégalité alors qu'une fonction décroissante le modifie.

Remarque : On peut également définir la croissance (resp. la décroissance) stricte d'une fonction. On dit que f est strictement croissante (resp. décroissante) ssi pour tout $u, v, \in I$ tels que $u < v$, on a $f(u) < f(v)$ (resp. $f(u) > f(v)$).

Propriété -

- La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissante) est croissante (resp. décroissante).
- La composée de 2 fonctions ayant le même sens de variation est croissante.
- La composée de 2 fonctions ayant des sens de variations contraires est décroissante.

Démonstration directe de la propriété.

2) Dérivées de fonctions

Fonction	**Dérivée**	**Ensemble de dérivabilité**
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$	$f'(x) = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$

Remarque : Dans ce tableau, u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I.

Opérations basiques	**Dérivée**	**Conditions**
$f = u + v$	$f' = u' + v'$	
$f = ku \ (k \in \mathbb{R})$	$f' = ku'$	
$f = uv$	$f' = u'v + uv'$	
$f = \frac{1}{v}$	$f' = -\dfrac{v'}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I
$f = \frac{u}{v}$	$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I

Propriété - Dérivée d'une fonction composée

La dérivée d'une fonction composée $f(u)$ est donnée par

$$(f(u))' = u' \times f'(u)$$

Composition	Dérivée	Conditions
$f = u^n \ (n \in \mathbb{N})$	$f' = nu'u^{n-1}$	
$f = u^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$f' = \alpha u'u^{\alpha-1}$	u strictement positif
$f = \sqrt{u}$	$f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	u strictement positif
$f = e^u$	$f' = u'e^u$	
$f = \ln(u)$	$f' = \dfrac{u'}{u}$	u strictement positif
$f = u(ax+b)$	$f' = a \times u'(ax+b)$	

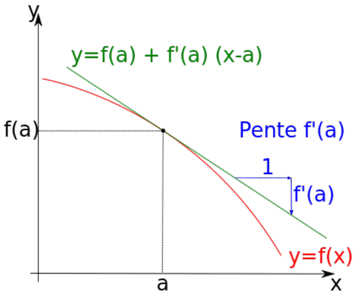
Remarque : La dérivation sera vue plus en détail au second semestre. En attendant, nous l'utiliserons pour trouver le sens de variation d'une fonction.

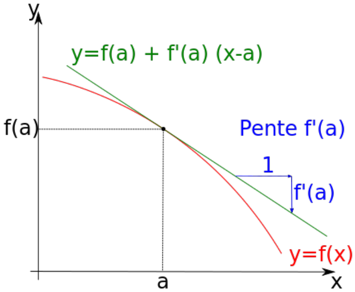
Propriété - Lien avec le sens de variation

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

- Si pour tout $x \in I \subset \mathcal{D}_f$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$), alors la fonction f est croissante (resp. strictement croissante) sur I.
- Si pour tout $x \in I \subset \mathcal{D}_f$, $f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$), alors la fonction f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur I.

Exercice 5


y
y=f(a) + f'(a) (x-a)
f(a)
Pente f'(a)
1
f'(a)
y=f(x)
a
x



Définition : Tangente

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et dérivable en $a \in \mathcal{D}_f$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite T_a d'équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Le coefficient directeur de cette tangente est le nombre $f'(a)$.

Exercice 6

3) Maximum et minimum

3) Maximum et minimum

Définition : Maximum-minimum

Soit f une fonction définie sur un intervalle réel I. Soit $a \in I$.

- On dit que f admet un maximum en a si :

$$\forall x \in I,\ f(x) \leq f(a).$$

  On notera le maximum de f : $\max\limits_{x \in I} f(x) = f(a)$.

- On dit que f admet un minimum en a si :

$$\forall x \in I,\ f(x) \geq f(a).$$

  On notera le minimum de f : $\min\limits_{x \in I} f(x) = f(a)$.

3) Maximum et minimum

Définition : Maximum-minimum

Soit f une fonction définie sur un intervalle réel I. Soit $a \in I$.

- On dit que f admet un maximum en a si :

$$\forall x \in I,\ f(x) \leq f(a).$$

  On notera le maximum de f : $\max\limits_{x \in I} f(x) = f(a)$.

- On dit que f admet un minimum en a si :

$$\forall x \in I,\ f(x) \geq f(a).$$

  On notera le minimum de f : $\min\limits_{x \in I} f(x) = f(a)$.

Propriété - Lien avec la dérivée

Soit une fonction f est dérivable sur un intervalle $]a, b[$ ouvert. Si $c \in]a, b[$ est un minimum ou un maximum de la fonction f alors $f'(c) = 0$.

Exercice 7

III - Introduction aux limites

1) Limites de fonctions usuelles

Remarque : Tout comme les dérivées, les limites seront vues plus en détails dans un cours prochain.

III - Introduction aux limites

1) Limites de fonctions usuelles

Remarque : Tout comme les dérivées, les limites seront vues plus en détails dans un cours prochain.

Propriété - Fonctions usuelles

Fonctions	Limites à retenir
Puissances	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n est pair, $-\infty$ sinon
Inverse	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$
Racine carrée	$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$
logarithme	$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$
exponentielle	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
Valeur absolue	$\lim\limits_{x\to+\infty} \|x\| = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \|x\| = +\infty$

2) Opérations sur les limites

Propriété - Limite de $f + g$

lim g / lim f	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

Exemple -

$$\lim_{x \to +\infty} x + \sqrt{x} = +\infty$$

Exercice 8

Propriété - Limite de $f \times g$

$\lim g$ / $\lim f$	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell \times \ell'$	0	$\text{sgn}(\ell').\infty$	$-\text{sgn}(\ell').\infty$
0	0	0	FI	FI
$+\infty$	$\text{sgn}(\ell).\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\text{sgn}(\ell).\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

Exemple -

$$\lim_{x \to +\infty} x \times \sqrt{x} = +\infty$$

Exercice 9

Propriété - Limite de $\dfrac{f}{g}$

lim g / lim f	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\text{sgn}(\ell').\infty$	$-\text{sgn}(\ell').\infty$
0^+	$\text{sgn}(\ell).\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$-\text{sgn}(\ell).\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	FI	FI
$-\infty$	0	0	FI	FI

Exemple -

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = 0 \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$$

Exercice 10

3) Limite d'une fonction composée

Comment déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1}$ *?*

3) Limite d'une fonction composée

Comment déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}$ *?*

Propriété - Limite de fonctions composées

Soient f , g ,h trois fonctions telles que $f(x) = g(h(x))$ sur un intervalle I. Soient a, b, c des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} g(X) = c$, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

3) Limite d'une fonction composée

Comment déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+1}$ *?*

Propriété - Limite de fonctions composées

Soient f , g ,h trois fonctions telles que $f(x) = g(h(x))$ sur un intervalle I. Soient a, b, c des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$ et $\lim\limits_{X \to b} g(X) = c$, alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

Déterminer la limite de $f(x) = g(h(x))$ en x_0

1. On pose $X = h(x)$.
2. On détermine la limite b de $h(x)$ en x_0.
3. On détermine la limite c de $g(X)$ en b, et on conclut : la limite de f en x_0 vaut c.

Exemple précédent puis Exercice 11