

# Chapitre 19: Techniques d'intégration

M Leboucher



## Savoir Faire:

- Étudier une suite définie par une intégrale
- Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties
- Calculer une intégrale à l'aide d'un changement de variable.
- Reconnaître une somme de Riemann et calculer sa limite.

# I - Propriétés d'encadrement et valeur moyenne.

## 1) Encadrement



*Si une fonction  $f$  est positive, que dire de l'intégrale de  $f$  ?*

Propriétés  
d'encadrement et  
valeur moyenne.

Encadrement

Valeur moyenne d'une  
fonction

Méthode de calcul  
d'intégrales

Intégration par parties

Changement de variable

Somme de Riemann

# I - Propriétés d'encadrement et valeur moyenne.

## 1) Encadrement



*Si une fonction  $f$  est positive, que dire de l'intégrale de  $f$  ?*

### Propriété - Positivité de l'intégrale

Soit  $f$  une fonction **continue** sur un segment  $[a; b]$  avec  $a \leq b$ .

- Si pour tout réel  $t$  de  $[a; b]$ ,  $f(t) \geq 0$ , alors

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0.$$

# I - Propriétés d'encadrement et valeur moyenne.

## 1) Encadrement



*Si une fonction  $f$  est positive, que dire de l'intégrale de  $f$  ?*

### Propriété - Positivité de l'intégrale

Soit  $f$  une fonction **continue** sur un segment  $[a; b]$  avec  $a \leq b$ .

- Si pour tout réel  $t$  de  $[a; b]$ ,  $f(t) \geq 0$ , alors

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0.$$

- Si pour tout réel  $t$  de  $[a; b]$ ,  $f(t) \leq g(t)$ , alors

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

# I - Propriétés d'encadrement et valeur moyenne.

## 1) Encadrement



*Si une fonction  $f$  est positive, que dire de l'intégrale de  $f$  ?*

### Propriété - Positivité de l'intégrale

Soit  $f$  une fonction **continue** sur un segment  $[a; b]$  avec  $a \leq b$ .

- Si pour tout réel  $t$  de  $[a; b]$ ,  $f(t) \geq 0$ , alors

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0.$$

- Si pour tout réel  $t$  de  $[a; b]$ ,  $f(t) \leq g(t)$ , alors

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$



**Remarque :** Il faut absolument que  $a \leq b$



*Démonstration de la propriété et Exercice 1*

Propriétés  
d'encadrement et  
valeur moyenne.

Encadrement

Valeur moyenne d'une  
fonction

Méthode de calcul  
d'intégrales

Intégration par parties

Changement de variable

Somme de Riemann



*Que dire si  $f$  est positive d'intégrale nulle ?*



*Que dire si  $f$  est positive d'intégrale nulle ?*

### Corollaire

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur  $[a; b]$ . Si

$$\int_a^b f(t)dt = 0$$

alors  $f(t) = 0$  pour tout  $t \in [a, b]$ .

## 2) Valeur moyenne d'une fonction



*Comment définir une valeur moyenne pour une fonction ?*

## 2) Valeur moyenne d'une fonction



*Comment définir une valeur moyenne pour une fonction ?*

### Définition : Valeur moyenne

Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a; b]$ . Le nombre réel

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

est appelé valeur moyenne de  $f$  entre  $a$  et  $b$ .

## 2) Valeur moyenne d'une fonction



*Comment définir une valeur moyenne pour une fonction ?*

### Définition : Valeur moyenne

Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a; b]$ . Le nombre réel

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

est appelé valeur moyenne de  $f$  entre  $a$  et  $b$ .

### Théorème - Inégalité de la moyenne

Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a, b]$  tel que pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $m \leq f(t) \leq M$  alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a) \quad \text{ou} \quad m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq M$$



*Démonstration de deux façons et Exercice 2*

## Théorème -

Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a, b]$ . Il existe un réel  $c$  situé entre  $a$  et  $b$ , tel que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = f(c)$$



*Démonstration du théorème*

## Théorème -

Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a, b]$ . Il existe un réel  $c$  situé entre  $a$  et  $b$ , tel que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = f(c)$$



*Démonstration du théorème*



*Redonner l'inégalité triangulaire*

## Théorème -

Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a, b]$ . Il existe un réel  $c$  situé entre  $a$  et  $b$ , tel que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = f(c)$$



*Démonstration du théorème*



*Redonner l'inégalité triangulaire*

## Théorème - Inégalité triangulaire

Soit  $f$  une fonction **continue** sur un segment  $[a; b]$  avec  $a \leq b$  alors

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \leq (b-a) \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$$



*Exercice 3*

## II - Méthode de calcul d'intégrales

### 1) Intégration par parties



*Rappeler la formule de dérivation  $(uv)'$*

Propriétés  
d'encadrement et  
valeur moyenne.

Encadrement  
Valeur moyenne d'une  
fonction

Méthode de calcul  
d'intégrales

Intégration par parties

Changement de variable

Somme de Riemann

## II - Méthode de calcul d'intégrales

### 1) Intégration par parties



*Rappeler la formule de dérivation  $(uv)'$*

#### Théorème - Intégration par partie

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un segment  $[a; b]$ .

Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$



*Démonstration directe du théorème*

## II - Méthode de calcul d'intégrales

### 1) Intégration par parties



*Rappeler la formule de dérivation  $(uv)'$*

#### Théorème - Intégration par partie

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un segment  $[a; b]$ .

Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$



*Démonstration directe du théorème*



#### Intégration par partie

Pour calculer une intégrale par intégration par partie, on détermine les fonctions  $u$  et  $v$  qui interviennent et on vérifie qu'elles sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle considéré.



*Exercice 4*

Propriétés  
d'encadrement et  
valeur moyenne.

Encadrement  
Valeur moyenne d'une  
fonction

Méthode de calcul  
d'intégrales

Intégration par parties

Changement de variable

Somme de Riemann

## 2) Changement de variable



*Rappeler la formule de dérivation pour  $(u \circ v)'$*

## 2) Changement de variable



*Rappeler la formule de dérivation pour  $(u \circ v)'$*

### Théorème - Changement de variable

Si  $f$  est une fonction continue sur  $[a; b]$  et  $\varphi$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $f([a, b])$  alors :

$$\int_a^b f \circ \varphi(u) \varphi'(u) du = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$$

## 2) Changement de variable



*Rappeler la formule de dérivation pour  $(u \circ v)'$*

### Théorème - Changement de variable

Si  $f$  est une fonction continue sur  $[a; b]$  et  $\varphi$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $f([a, b])$  alors :

$$\int_a^b f \circ \varphi(u) \varphi'(u) du = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$$



**Remarque :** La plupart du temps, le changement de variable sera donné (les seuls que vous devez savoir trouver sont ceux de la forme  $u = at + b$ )



*Exercice 5*



## Changement de variable

Soit  $I = \int_a^b f(t)dt$ . On veut remplacer la variable  $t$  par la variable  $x$ .

- 1 On écrit  $x$  en fonction de  $t$ . (donné souvent dans l'énoncé)
- 2 On écrit  $dx$  en fonction de  $dt$  (en dérivant)
- 3 On remplace 3 choses
  - 1 On remplace  $dt$  par la formule avec  $dx$
  - 2 Tous les  $t$  doivent être remplacé par des  $x$
  - 3 Les bornes de l'intégrale doivent être changés.



### Exercice 6

## III - Somme de Riemann



*Comment définir les intégrales à l'aide de rectangle ?*

Propriétés  
d'encadrement et  
valeur moyenne.

Encadrement  
Valeur moyenne d'une  
fonction

Méthode de calcul  
d'intégrales

Intégration par parties  
Changement de variable

**Somme de Riemann**

## III - Somme de Riemann



*Comment définir les intégrales à l'aide de rectangle ?*

### Définition : Somme de Riemann

Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a, b]$  et  $n \geq 1$ . On appelle somme de Riemann (à pas constant) la somme :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

### Théorème - Somme de Riemann

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(t) dt$ .



*Exercice 7*