

# Chapitre 18: Introduction aux espaces vectoriels



## Savoir Faire:

- Montrer qu'un vecteur s'écrit comme combinaison linéaire d'autres vecteurs.
- Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel.
- Trouver une famille libre, génératrice ou une base d'un sous espace vectoriel
- Exprimer et simplifier un espace vectoriel sous la forme d'un Vect.

# I - Rappels sur les vecteurs

## 1) Vecteur du plan

## I - Rappels sur les vecteurs

### 1) Vecteur du plan

#### Définition : Vecteur

Un vecteur est défini par :

- une longueur
- une direction
- un sens

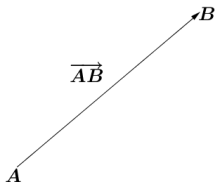
## I - Rappels sur les vecteurs

### 1) Vecteur du plan

#### Définition : Vecteur

Un vecteur est défini par :

- une longueur
- une direction
- un sens



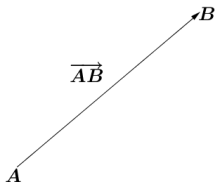
## I - Rappels sur les vecteurs

### 1) Vecteur du plan

#### Définition : Vecteur

Un vecteur est défini par :

- une longueur
- une direction
- un sens



#### Propriété -

On peut également définir un vecteur du plan à l'aide de deux coordonnées  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

## 2) Vecteur et dimension

Rappels sur les  
vecteurs

Vecteur du plan

**Vecteur et dimension**

Calculs avec des vecteurs

Espaces vectoriels

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Définition

Combinaisons linéaires de  
 $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Bases de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Sous espace vectoriel  
de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

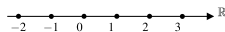
Sous espace vectoriel

Sous espace vectoriel  
engendré

## 2) Vecteur et dimension

Droite des réels  $\mathbb{R}$  (Dimension 1)

$$\vec{u} = (x)$$



Rappels sur les  
vecteurs

Vecteur du plan

**Vecteur et dimension**

Calculs avec des vecteurs

Espaces vectoriels

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Définition

Combinaisons linéaires de  
 $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Bases de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Sous espace vectoriel  
de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

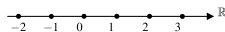
Sous espace vectoriel

Sous espace vectoriel  
engendré

## 2) Vecteur et dimension

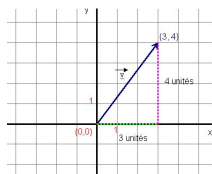
Droite des réels  $\mathbb{R}$  (Dimension 1)

$$\vec{u} = (x)$$



Plan réel  $\mathbb{R}^2$  (Dimension 2)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Rappels sur les  
vecteurs

Vecteur du plan

**Vecteur et dimension**

Calculs avec des vecteurs

Espaces vectoriels

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Définition

Combinaisons linéaires de  
 $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Bases de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Sous espace vectoriel  
de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

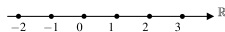
Sous espace vectoriel

engendré

## 2) Vecteur et dimension

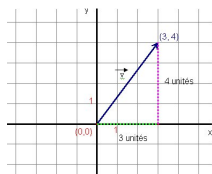
Droite des réels  $\mathbb{R}$  (Dimension 1)

$$\vec{u} = (x)$$



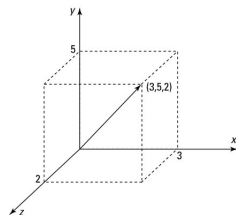
Plan réel  $\mathbb{R}^2$  (Dimension 2)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Espace  $\mathbb{R}^3$  (Dimension 3)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



Rappels sur les  
vecteurs

Vecteur du plan

Vecteur et dimension

Calculs avec des vecteurs

Espaces vectoriels

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Définition

Combinaisons linéaires de  
 $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Bases de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Sous espace vectoriel  
de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

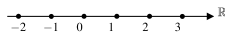
Sous espace vectoriel

engendré

## 2) Vecteur et dimension

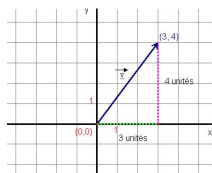
Droite des réels  $\mathbb{R}$  (Dimension 1)

$$\vec{u} = (x)$$



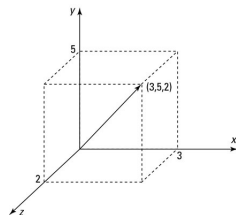
Plan réel  $\mathbb{R}^2$  (Dimension 2)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Espace  $\mathbb{R}^3$  (Dimension 3)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



Que dire des vecteurs dans des espaces de dimension supérieures ?

### 3) Calculs avec des vecteurs



*Quels calculs peut-on faire avec des vecteurs ?*

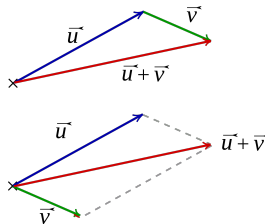
### 3) Calculs avec des vecteurs



*Quels calculs peut-on faire avec des vecteurs ?*

#### Addition de 2 vecteurs

- $\vec{u} + \vec{v}$  est un vecteur
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  (commutativité)
- $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$   
(associativité)
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$  (élément neutre)



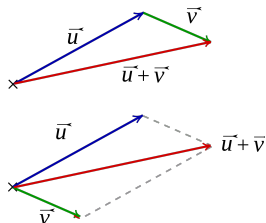
### 3) Calculs avec des vecteurs



*Quels calculs peut-on faire avec des vecteurs ?*

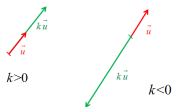
#### Addition de 2 vecteurs

- $\vec{u} + \vec{v}$  est un vecteur
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  (commutativité)
- $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$   
(associativité)
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$  (élément neutre)



#### Multiplication par un réel $\lambda$

- $\lambda \cdot \vec{u}$  est un vecteur
- $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$  (distributivité)
- $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$
- $\lambda \cdot (\mu\vec{u}) = (\lambda \times \mu) \cdot \vec{u}$



## II - Espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

### 1) Définition



*Loi internes et lois externes ?*

#### Définition : Loi de composition interne et externe

Soit  $E$  un ensemble non vide :

- On dit que la loi  $+$  est une **loi de composition interne** sur  $E$  si :

$$\forall x, y \in E, \quad x + y \in E$$

- On dit que la loi  $\cdot$  est une **loi de composition externe** sur  $E$  si :

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot x \in E$$



*Donnez des exemples de lois interne ou externe*

## Définition : Espace vectoriel

On appelle **espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$**  ou  **$\mathbb{R}$ -espace vectoriel** tout ensemble **non vide**  $E$ , muni d'une loi de composition interne notée  $+$  et d'une loi de composition externe notée  $\cdot$  qui vérifient toutes les propriétés suivantes :  $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

- ❶
  - $x + y = y + x$  (Commutativité de la loi  $+$ )
  - $(x + y) + z = x + (y + z)$  (Associativité de la loi  $+$ )
  - $\exists 0_E \in E$  tel que  $\forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x$
  - $\forall x \in E$ , il existe  $y \in E$ , appelé opposé de  $x$  que  $x + y = 0_E$
- ❷
  - $1 \cdot x = x$
  - $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$  (distributivité)
  - $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
  - $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$

🌀 **Remarque :** Les éléments  $x, y, z$  de  $E$  sont appelés des vecteurs et les réels  $\lambda, \mu$  sont appelés des scalaires

🌀 **Remarque :** On n'utilisera jamais cette définition pour montrer qu'un espace est un espace vectoriel

👁️ *Démontrer que l'espace  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est un espace vectoriel*

## 2) Combinaisons linéaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$



### *Définition d'une combinaison linéaire*

Rappels sur les  
vecteurs

Vecteur du plan

Vecteur et dimension

Calculs avec des vecteurs

Espaces vectoriels

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Définition

**Combinaisons linéaires de  
 $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$**

Bases de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Sous espace vectoriel  
de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Sous espace vectoriel

Sous espace vectoriel  
engendré

## 2) Combinaisons linéaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$



### *Définition d'une combinaison linéaire*

#### Définition : Combinaison linéaire

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$  une famille (ou  $p$ -uplets) de vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . On dit qu'un vecteur  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est **combinaison linéaire** de cette famille s'il existe  $p$  réels

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \text{ tels que } X = \sum_{i=1}^p \lambda_i U_i.$$



### *Exercice 1*

Rappels sur les  
vecteurs

Vecteur du plan

Vecteur et dimension

Calculs avec des vecteurs

Espaces vectoriels

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Définition

Combinaisons linéaires de  
 $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Bases de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Sous espace vectoriel  
de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Sous espace vectoriel

Sous espace vectoriel  
engendré

## 2) Combinaisons linéaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$



### Définition d'une combinaison linéaire

#### Définition : Combinaison linéaire

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$  une famille (ou  $p$ -uplets) de vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . On dit qu'un vecteur  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est **combinaison linéaire** de cette famille s'il existe  $p$  réels

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \text{ tels que } X = \sum_{i=1}^p \lambda_i U_i.$$



### Exercice 1

#### Définition : Famille libre

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On dit qu'une famille  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$  de vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est libre si

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i U_i = 0 \implies \forall i \in [1, p], \quad \lambda_i = 0$$



### Exercice 2

Rappels sur les  
vecteurs

Vecteur du plan

Vecteur et dimension

Calculs avec des vecteurs

Espaces vectoriels

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Définition

Combinaisons linéaires de  
 $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Bases de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Sous espace vectoriel  
de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Sous espace vectoriel

Sous espace vectoriel  
engendré

## 2) Combinaisons linéaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$



### Définition d'une combinaison linéaire

#### Définition : Combinaison linéaire

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$  une famille (ou  $p$ -uplets) de vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . On dit qu'un vecteur  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est **combinaison linéaire** de cette famille s'il existe  $p$  réels

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \text{ tels que } X = \sum_{i=1}^p \lambda_i U_i.$$



### Exercice 1

#### Définition : Famille libre

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On dit qu'une famille  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$  de vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est libre si

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i U_i = 0 \implies \forall i \in [1, p], \quad \lambda_i = 0$$



### Exercice 2

Rappels sur les  
vecteurs

Vecteur du plan

Vecteur et dimension

Calculs avec des vecteurs

Espaces vectoriels

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Définition

Combinaisons linéaires de  
 $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Bases de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Sous espace vectoriel  
de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Sous espace vectoriel

Sous espace vectoriel  
engendré

Rappels sur les  
vecteurs

Vecteur du plan

Vecteur et dimension

Calculs avec des vecteurs

Espaces vectoriels

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Définition

Combinaisons linéaires de  
 $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Bases de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Sous espace vectoriel  
de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Sous espace vectoriel

Sous espace vectoriel  
engendré

## Définition : Famille génératrice

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On dit qu'une famille  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$  de vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est génératrice si on peut écrire tout vecteur  $X$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  comme combinaison linéaire de  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$ .  
Autrement dit

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}, X = \sum_{i=1}^p \lambda_i U_i.$$



### Exercice 3

Rappels sur les  
vecteurs

Vecteur du plan

Vecteur et dimension

Calculs avec des vecteurs

Espaces vectoriels

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Définition

Combinaisons linéaires de  
 $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

**Bases de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$**

Sous espace vectoriel  
de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Sous espace vectoriel

Sous espace vectoriel  
engendré

### 3) Bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

### 3) Bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

#### Définition : Base

On dit qu'une famille  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$  de vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est une base si tout vecteur  $X$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est une unique combinaison linéaire de  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$ . Autrement dit

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}, X = \sum_{i=1}^p \lambda_i U_i.$$

### 3) Bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

#### Définition : Base

On dit qu'une famille  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$  de vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est une base si tout vecteur  $X$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est une unique combinaison linéaire de  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$ . Autrement dit

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}, X = \sum_{i=1}^p \lambda_i U_i.$$

#### Propriété - Base

Une famille  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$  de vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est une base si et seulement si c'est une famille libre et génératrice.



#### Exercice 4

Rappels sur les  
vecteurs

Vecteur du plan

Vecteur et dimension

Calculs avec des vecteurs

Espaces vectoriels

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Définition

Combinaisons linéaires de  
 $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Bases de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Sous espace vectoriel  
de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Sous espace vectoriel

engendré

## Propriété - Base canonique

La famille  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\dots$ ,  $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  est une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  appelée la base canonique.

## Propriété - Base canonique

La famille  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\dots$ ,  $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  est une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  appelée la base canonique.



**Remarque :** Base canonique signifie que c'est la base la plus évidente.



### Exercice 5

## III - Sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

### 1) Sous espace vectoriel

Rappels sur les  
vecteurs

Vecteur du plan

Vecteur et dimension

Calculs avec des vecteurs

Espaces vectoriels

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Définition

Combinaisons linéaires de  
 $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Bases de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Sous espace vectoriel  
de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Sous espace vectoriel

Sous espace vectoriel  
engendré

## III - Sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

### 1) Sous espace vectoriel

**Définition :** Sous espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

On appelle **sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$**  tout ensemble  $F \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que :

- $F \neq \emptyset$
- $\forall (X, Y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda X + Y \in F$


## III - Sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

### 1) Sous espace vectoriel

**Définition :** Sous espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

On appelle **sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$**  tout ensemble  $F \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que :

- $F \neq \emptyset$
- $\forall (X, Y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda X + Y \in F$

 **Remarque :** Pour montrer le premier point, on vérifie très souvent que le vecteur 0 appartient à  $F$ .


## III - Sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$


### 1) Sous espace vectoriel

#### Définition : Sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

On appelle **sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$**  tout ensemble  $F \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que :

- $F \neq \emptyset$
- $\forall (X, Y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda X + Y \in F$

 **Remarque** : Pour montrer le premier point, on vérifie très souvent que le vecteur 0 appartient à  $F$ .

 **Remarque** : Un sous espace vectoriel est un espace vectoriel et c'est donc cette méthode que l'on utilise pour montrer qu'on a un espace vectoriel



#### Exercice 6

## Propriété -

Soit  $F$  un sous espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Alors  $0 \in F$ .



**Remarque :** La contraposée de cette proposition est très utile pour montrer qu'un ensemble n'est pas un sev.



## Exercice 7

## 2) Sous espace vectoriel engendré

### Propriété - sous espace vectoriel engendré

Soit  $p \in \mathbb{N}$  et  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$  une famille de  $p$  vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de la famille de vecteurs  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$  forme un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Cet ensemble est appelé **sous-espace vectoriel engendré par**  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$  et est noté **Vect** $(U_1, U_2, \dots, U_p)$ .



### Exercice 8

## 2) Sous espace vectoriel engendré

### Propriété - sous espace vectoriel engendré

Soit  $p \in \mathbb{N}$  et  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$  une famille de  $p$  vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de la famille de vecteurs  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$  forme un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Cet ensemble est appelé **sous-espace vectoriel engendré par**  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$  et est noté **Vect** $(U_1, U_2, \dots, U_p)$ .



### Exercice 8



**Remarque :** Si  $F = \text{Vect}(U_1, \dots, U_p)$  alors  $(U_1, \dots, U_p)$  est une famille génératrice de  $F$ .



### Exercice 9