Chapitre 17: Espaces probabilisés infinis

M Leboucher

"C-3PO : - Les chances de traverser un champ d'astéroïde avec succès sont d'approximativement une sur 3720.
Han Solo : - Tu sais, moi et les probabilités ".

Star Wars : L'empire Contre-Attaque

Savoir Faire:

- Modéliser un problème de probabilité.
- Calculer la probabilité d'une union ou d'une intersection infinie
- Déterminer des lois de probabilités.
- Appliquer la formule des probabilité totales.

I - Espaces probabilisable

1) Introduction

1. Première situation : On lance trois fois un dé non truqué.
   - Quelle est la probabilité d'obtenir le premier 6 au premier lancer ? au deuxième ? au troisième ?
   - Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?

I - Espaces probabilisable

1) Introduction

1. Première situation : On lance trois fois un dé non truqué.
   - Quelle est la probabilité d'obtenir le premier 6 au premier lancer ? au deuxième ? au troisième ?
   - Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?

Univers Ω	Évènements $\mathcal{P}(\Omega)$	Probabilité P
$\Omega = [\![1, 6]\!]^3$	A_j : Obtenir le premier 6 au $j$ème lancer, $j \in [\![1, 3]\!]$	$P(A_1) = 1/6$ $P(A_2) = 5/36$ $P(A_3) = 25/216$
	B : Obtenir au moins un 6 : $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$	$P(B) = 91/216.$ $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$

I - Espaces probabilisable

1) Introduction

1. Première situation : On lance trois fois un dé non truqué.
   - Quelle est la probabilité d'obtenir le premier 6 au premier lancer ? au deuxième ? au troisième ?
   - Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?

Univers Ω	Évènements $\mathcal{P}(\Omega)$	Probabilité P
$\Omega = [\![1,6]\!]^3$	A_j : Obtenir le premier 6 au $j$ème lancer, $j \in [\![1,3]\!]$	$P(A_1) = 1/6$ $P(A_2) = 5/36$ $P(A_3) = 25/216$
	B : Obtenir au moins un 6 : $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$	$P(B) = 91/216.$ $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$

2. Seconde situation : On lance un dé jusqu'à ce que l'on obtienne un 6.
   - Quelle est la probabilité d'obtenir le premier 6 au $n^{ième}$ lancer ?
   - Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?

Remplir le même tableau

2) Tribu

Quelles opérations connait-on sur les évènements ?

2) Tribu

Quelles opérations connait-on sur les évènements ?

Définition : Tribu

Soit Ω un ensemble, $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$. On dit que $\mathcal{A}$ est une **tribu** de Ω si :

- $\Omega \in \mathcal{A}$,
- Stabilité du passage au complémentaire : $\forall A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{A}$,
- Stabilité de l'union dénombrable : si pour tout $i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A}$ alors

$$\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Remarque : Une tribu est aussi appelée σ-algèbre d'évènements.

Propriété - Ensemble d'une tribu

Soit $\mathcal{A}$ *une tribu de* Ω. *Alors :*

- $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- Toute réunion (finie ou infinie) intersection (finie ou infinie) et complémentaire d'éléments de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$.

Propriété - Ensemble d'une tribu

Soit $\mathcal{A}$ *une tribu de* Ω. *Alors :*

- $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- Toute réunion (finie ou infinie) intersection (finie ou infinie) et complémentaire d'éléments de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$.

Définition : Espace probabilisable

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. L'ensemble $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace probabilisable.

Propriété - Ensemble d'une tribu

Soit $\mathcal{A}$ *une tribu de* Ω. *Alors :*

- $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- Toute réunion (finie ou infinie) intersection (finie ou infinie) et complémentaire d'éléments de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$.

Définition : Espace probabilisable

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. L'ensemble $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace probabilisable.

Remarque : Puisqu'on est dans le cadre des probabilités, si $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable, tout ensemble $A \in \mathcal{A}$ est appelé événement. Ainsi, la tribu $\mathcal{A}$ contient l'ensemble des événements auxquels on va s'intéresser.

Exercice 1

3) Calculs avec les Évènements

Rappeler les règles de distributivité de 3 évènements et les lois de Morgan.

3) Calculs avec les Évènements

Rappeler les règles de distributivité de 3 évènements et les lois de Morgan.

Théorème - Distributivité

Soit $\mathcal{A}$ une tribu. Soient $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des éléments de $\mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ un évènement. On a les règles de calculs suivantes :

$$B \cap \left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i \right) = \bigcup_{i=0}^{+\infty} (B \cap A_i) \text{, et } B \cup \left(\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i \right) = \bigcap_{i=0}^{+\infty} (B \cup A_i)$$

3) Calculs avec les Évènements

Rappeler les règles de distributivité de 3 évènements et les lois de Morgan.

Théorème - Distributivité

Soit $\mathcal{A}$ une tribu. Soient $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des éléments de $\mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ un évènement. On a les règles de calculs suivantes :

$$B \cap \left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i \right) = \bigcup_{i=0}^{+\infty} (B \cap A_i) \text{, et } B \cup \left(\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i \right) = \bigcap_{i=0}^{+\infty} (B \cup A_i)$$

Théorème - Lois de Morgan

Soit $\mathcal{A}$ une tribu. Soient $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (éléments de $\mathcal{A}$). On a :

$$\overline{\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i} = \bigcap_{i=0}^{+\infty} \overline{A_i}, \text{ et } \overline{\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i} = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \overline{A_i}$$

4) Systèmes complet d'évènements

Rappeler ce qu'est un système complet d'évènement dans le cas fini

4) Systèmes complet d'évènements

Rappeler ce qu'est un système complet d'évènement dans le cas fini

Définition : Système complet d'évènement

Soit $\mathcal{A}$ une tribu d'un ensemble Ω. *On appelle* **système complet d'évènements de Ω** toute famille $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que :

- $\forall i \in \mathbb{N},\ A_i \in \mathcal{A}$
- La réunion des A_i est égale à Ω : $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i = \Omega$
- Les A_i sont deux à deux disjoints (incompatibles) $\forall i,j \in \mathbb{N}, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$.

4) Systèmes complet d'évènements

Rappeler ce qu'est un système complet d'évènement dans le cas fini

Définition : Système complet d'évènement

Soit $\mathcal{A}$ une tribu d'un ensemble Ω. *On appelle* **système complet d'évènements de** Ω toute famille $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que :

- $\forall i \in \mathbb{N},\ A_i \in \mathcal{A}$
- La réunion des A_i est égale à Ω : $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i = \Omega$
- Les A_i sont deux à deux disjoints (incompatibles) $\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$.

Exemple - Système complet d'évènements

On considère $\Omega = \mathbb{N}$.

Quel système complet d'évènements peut-on mettre sur Ω ?

II - Probabilité et espace probabilisé

1) Probabilité

Rappeler la définition d'une probabilité

II - Probabilité et espace probabilisé

1) Probabilité

Rappeler la définition d'une probabilité

Définition : Probabilité

Soit $\mathcal{A}$ une tribu d'un ensemble Ω. On appelle **probabilité** toute **application**

$$P : \mathcal{A} \to [0; 1]$$

telle que :

- (Probabilité de l'évènement certain) $P(\Omega) = 1$
- (σ-additivité). Pour toute suite d'événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ deux à deux incompatibles, on a

$$P\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(A_i)$$

Exercice 2

2) Espace probabilisé

Définition : Espace probabilisé

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé.

2) Espace probabilisé

Définition : Espace probabilisé

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Propriété -

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

2) Espace probabilisé

Définition : Espace probabilisé

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Propriété -

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

- $P(\emptyset) = 0$

2) Espace probabilisé

Définition : Espace probabilisé

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Propriété -

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

- $P(\emptyset) = 0$
- Pour tout évènement $A \in \mathcal{A}$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2) Espace probabilisé

Définition : Espace probabilisé

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Propriété -

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

- $P(\emptyset) = 0$
- Pour tout évènement $A \in \mathcal{A}$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Si $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ avec $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$.

2) Espace probabilisé

Définition : Espace probabilisé

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Propriété -

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

- $P(\emptyset) = 0$
- Pour tout évènement $A \in \mathcal{A}$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Si $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ avec $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$.

Théorème - Union d'évènements

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soient A et B deux évènements. Alors

2) Espace probabilisé

Définition : Espace probabilisé

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. L'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Propriété -

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

- $P(\emptyset) = 0$
- Pour tout évènement $A \in \mathcal{A}$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Si $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ avec $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$.

Théorème - Union d'évènements

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soient A et B deux évènements. Alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Exercice 3

III - Propriétés des probabilités

1) Limite monotone

Dans cette partie, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé

III - Propriétés des probabilités

1) Limite monotone

Dans cette partie, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé

Définition : Suite croissante et décroissante d'évènements

- On dit que la suite d'évènement $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$.

III - Propriétés des probabilités

1) Limite monotone

Dans cette partie, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé

Définition : Suite croissante et décroissante d'évènements

- On dit que la suite d'évènement $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$.
- On dit que la suite d'évènement $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$.

III - Propriétés des probabilités

1) Limite monotone

Dans cette partie, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé

Définition : Suite croissante et décroissante d'évènements

- On dit que la suite d'évènement $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$.
- On dit que la suite d'évènement $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$.

Théorème - Limite monotone

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de $\mathcal{A}$.

- Si la suite (A_n) est croissante, alors $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

III - Propriétés des probabilités

1) Limite monotone

Dans cette partie, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé

Définition : Suite croissante et décroissante d'évènements

- On dit que la suite d'évènement $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$.
- On dit que la suite d'évènement $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$.

Théorème - Limite monotone

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de $\mathcal{A}$.

- Si la suite (A_n) est croissante, alors $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.
- Si (A_n) est décroissante, alors $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Exercice 4

Que dire de la limite monotone avec des évènements quelconques ?

Que dire de la limite monotone avec des évènements quelconques ?

Propriété -

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de $\mathcal{A}$. Alors

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)$$

Que dire de la limite monotone avec des évènements quelconques ?

Propriété -

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de $\mathcal{A}$. Alors

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)$$

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right)$$

Preuve directe et Exercice 5

2) Évènement vrai presque surement

Dans les deux derniers exercices, nous avons obtenus des probabilités égales à 0 ou 1 alors que les évènements n'étaient ni impossible ni certain.

2) Évènement vrai presque surement

Dans les deux derniers exercices, nous avons obtenus des probabilités égales à 0 ou 1 alors que les évènements n'étaient ni impossible ni certain.

Définition :

Soit A un évènement de $\mathcal{A}$.

- On dit que A est **négligeable** si $P(A) = 0$

2) Évènement vrai presque surement

Dans les deux derniers exercices, nous avons obtenus des probabilités égales à 0 ou 1 alors que les évènements n'étaient ni impossible ni certain.

Définition :

Soit A un évènement de $\mathcal{A}$.

- On dit que A est **négligeable** si $P(A) = 0$
- On dit que A est **presque sur** (ou vrai presque surement) si $P(A) = 1$.

2) Évènement vrai presque surement

Dans les deux derniers exercices, nous avons obtenus des probabilités égales à 0 ou 1 alors que les évènements n'étaient ni impossible ni certain.

Définition :

Soit A un évènement de $\mathcal{A}$.

- On dit que A est **négligeable** si $P(A) = 0$
- On dit que A est **presque sur** (ou vrai presque surement) si $P(A) = 1$.

Remarque : Ce cas n'arrivait jamais dans un espace probabilisé fini. En effet, dans ce cas, $P(A) = 0$ si et seulement si $A = \emptyset$. C'est une particularité des espaces probabilisés infinis.

Exercice 6

3) Probabilité conditionnelle

Définition d'une probabilité conditionnelle et formule des probabilités composée ?

3) Probabilité conditionnelle

Définition d'une probabilité conditionnelle et formule des probabilités composée ?

3) Probabilité conditionnelle

Définition d'une probabilité conditionnelle et formule des probabilités composée ?

Définition : Probabilités conditionnelles

Soit $A \in \mathcal{A}$ un évènement de probabilité **non nulle**. Alors l'application P_A définie sur $\mathcal{A}$ par

$$\forall B \in \mathcal{A}, \quad P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)},$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ appelée probabilité sachant A. Elle est parfois notée $P\left(B|A\right)$.

3) Probabilité conditionnelle

Définition d'une probabilité conditionnelle et formule des probabilités composée ?

Définition : Probabilités conditionnelles

Soit $A \in \mathcal{A}$ un évènement de probabilité **non nulle**. Alors l'application P_A définie sur $\mathcal{A}$ par

$$\forall B \in \mathcal{A}, \quad P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)},$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ appelée probabilité sachant A. Elle est parfois notée $P(B|A)$.

Théorème - Formule des probabilités composées.

Pour tous évènements $A_1, \ldots, A_n$, on a

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Exercice 7

Rappeler la FPT et la formule de Bayes.

Rappeler la FPT et la formule de Bayes.

Théorème - Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un système complet d'évènements de Ω de probabilité non nulle. Alors on a

$$\forall B \in \mathcal{A}, \quad P(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(B \cap A_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) P_{A_k}(B)$$

En particulier

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) = 1$$

Rappeler la FPT et la formule de Bayes.

Théorème - Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un système complet d'évènements de Ω de probabilité non nulle. Alors on a

$$\forall B \in \mathcal{A}, \quad P(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(B \cap A_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) P_{A_k}(B)$$

En particulier

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) = 1$$

Théorème - Formule de Bayes

Soient $A, B \in \mathcal{A}$ deux évènements de probabilité non nulle.

Rappeler la FPT et la formule de Bayes.

Théorème - Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un système complet d'évènements de Ω de probabilité non nulle. Alors on a

$$\forall B \in \mathcal{A}, \quad P(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(B \cap A_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) P_{A_k}(B)$$

En particulier

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) = 1$$

Théorème - Formule de Bayes

Soient $A, B \in \mathcal{A}$ deux évènements de probabilité non nulle. Alors

$$P_A(B) = \frac{P(B)}{P(A)} P_B(A)$$

Exercice 8

4) Indépendance mutuelle

Rappeler la définition d'évènements indépendants

4) Indépendance mutuelle

Rappeler la définition d'évènements indépendants

Définition : Indépendance mutuelle

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite infinie d'événements de $\mathcal{A}$. On dit que la suite (A_i) est mutuellement indépendante si pour tout sous ensemble fini $J \subset \mathbb{N}$, on a

$$P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i)$$

Exercice 9