Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives
Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe
Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment

Savoir Faire:

- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive
- Calculer une intégrale en utilisant la linéarité ou la relation de Chasles.
- Étudier une intégrale fonction de sa borne supérieur.
- Étudier une intégrale dont les bornes sont des fonctions.

Si l'on lance votre cahier de mathématiques et un grain de sable du toit de Stanislas au même moment. Qui arrive le premier au sol ?

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives

Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe

Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

I - Primitive

1) Définition

Si l'on connait la fonction cout, on peut calculer la fonction cout marginal. Mais que se passe-t-il si on ne connait que la fonction cout marginal ?

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment

Primitive

Définition

Primitives et fonctions usuelles

Utilisation des formules de dérivation

Opération sur les primitives

Intégrale sur un segment

Définition à l'aide des primitives

Définition à l'aide de l'aire sous la courbe

Propriétés de l'intégrale

Inversion des bornes

Relation de Chasles

Linéarité

Primitive nulle en un point

I - Primitive

1) Définition

Si l'on connait la fonction cout, on peut calculer la fonction cout marginal. Mais que se passe-t-il si on ne connait que la fonction cout marginal ?

Définition : Primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On appelle **primitive de la fonction f sur l'intervalle I** une fonction F définie sur I telle que :

1. F est dérivable sur I
2. $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$

Déterminer deux primitives de $f : x \to e^x$ et de $g : x \to x^2$.

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives
Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe
Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

Que dire de l'unicité des primitives ?

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives

Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe

Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

Que dire de l'unicité des primitives ?

Propriété - Ensemble des primitives

Soit F une primitive de f sur l'intervalle I . Alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $F + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Que dire de l'unicité des primitives ?

Propriété - Ensemble des primitives

Soit F une primitive de f sur l'intervalle I . Alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $F + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Remarque : Cette proposition montre qu'il n'y a pas unicité des primitives d'une fonction. Il en existe une infinité qui diffèrent d'une constante.

Démonstration de la propriété

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives
Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe
Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

Que dire de l'unicité des primitives ?

Propriété - Ensemble des primitives

Soit F une primitive de f sur l'intervalle I . Alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $F+k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Remarque : Cette proposition montre qu'il n'y a pas unicité des primitives d'une fonction. Il en existe une infinité qui diffèrent d'une constante.

Démonstration de la propriété

Propriété - Unicité des primitives

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Alors pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives
Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe
Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

Que dire de l'unicité des primitives ?

Propriété - Ensemble des primitives

Soit F une primitive de f sur l'intervalle I . Alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $F+k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Remarque : Cette proposition montre qu'il n'y a pas unicité des primitives d'une fonction. Il en existe une infinité qui diffèrent d'une constante.

Démonstration de la propriété

Propriété - Unicité des primitives

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Alors pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$

Remarque : On comprend donc que si l'on impose une valeur à une primitive, celle-ci devient unique.

Déterminer la primitive F de la fonction $f : x \to \dfrac{1}{x}$ vérifiant $F(1) = 2$

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives

Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe

Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

Théorème - Existence des primitives

Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet au moins une primitive sur l'intervalle I.

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives

Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe

Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

Théorème - Existence des primitives

Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet au moins une primitive sur l'intervalle I.

Remarque : Cette proposition permet donc dans la plupart des cas que nous rencontrerons de n'avoir aucun problème d'existence d'une primitive d'une fonction.

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives
Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe
Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

Théorème - Existence des primitives

Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet au moins une primitive sur l'intervalle I.

Remarque : Cette proposition permet donc dans la plupart des cas que nous rencontrerons de n'avoir aucun problème d'existence d'une primitive d'une fonction.

Démonstration du théorème

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives
Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe
Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

2) Primitives et fonctions usuelles

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives
Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe
Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

2) Primitives et fonctions usuelles

fonction f	Primitive F	Intervalle I
$x \to a \ (a \neq 0)$	$x \to ax$	$\mathbb{R}$

2) Primitives et fonctions usuelles

fonction f	Primitive F	Intervalle I
$x \to a \ (a \neq 0)$	$x \to ax$	$\mathbb{R}$
$x \to x^n \ (n \geq 1)$	$x \to \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives
Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe
Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

2) Primitives et fonctions usuelles

fonction f	Primitive F	Intervalle I
$x \to a \ (a \neq 0)$	$x \to ax$	$\mathbb{R}$
$x \to x^n \ (n \geq 1)$	$x \to \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \to \dfrac{1}{x^n} \ (n > 1)$	$x \to -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$

2) Primitives et fonctions usuelles

fonction f	Primitive F	Intervalle I
$x \to a\ (a \neq 0)$	$x \to ax$	$\mathbb{R}$
$x \to x^n\ (n \geq 1)$	$x \to \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \to \dfrac{1}{x^n}\ (n > 1)$	$x \to -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \to 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$

2) Primitives et fonctions usuelles

fonction f	Primitive F	Intervalle I
$x \to a \ (a \neq 0)$	$x \to ax$	$\mathbb{R}$
$x \to x^n \ (n \geq 1)$	$x \to \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \to \dfrac{1}{x^n} \ (n > 1)$	$x \to -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \to 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \to x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$x \to \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives

Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe

Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

2) Primitives et fonctions usuelles

fonction f	Primitive F	Intervalle I
$x \to a \ (a \neq 0)$	$x \to ax$	$\mathbb{R}$
$x \to x^n \ (n \geq 1)$	$x \to \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \to \dfrac{1}{x^n} \ (n > 1)$	$x \to -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \to 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \to x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$x \to \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \to \dfrac{1}{x}$	$x \to \ln(\lvert x \rvert)$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment
Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives
Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe
Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

2) Primitives et fonctions usuelles

fonction f	Primitive F	Intervalle I
$x \to a \ (a \neq 0)$	$x \to ax$	$\mathbb{R}$
$x \to x^n \ (n \geq 1)$	$x \to \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \to \dfrac{1}{x^n} \ (n > 1)$	$x \to -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \to 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \to x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$x \to \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \to \dfrac{1}{x}$	$x \to \ln(\lvert x \rvert)$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$x \to e^x$	$x \to e^x$	$\mathbb{R}$

Compléter le tableau et Exercice 1

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives

Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe

Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

3) Utilisation des formules de dérivation

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives
Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe
Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

3) Utilisation des formules de dérivation

fonction f	Primitive F
$2u'u$	u^2

3) Utilisation des formules de dérivation

fonction f	Primitive F
$2u'u$	u^2
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$

3) Utilisation des formules de dérivation

fonction f	Primitive F
$2u'u$	u^2
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$

3) Utilisation des formules de dérivation

fonction f	Primitive F
$2u'u$	u^2
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$
$u'u^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

3) Utilisation des formules de dérivation

fonction f	Primitive F
$2u'u$	u^2
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$
$u'u^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$

3) Utilisation des formules de dérivation

fonction f	Primitive F
$2u'u$	u^2
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$
$u'u^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$
$u'e^u$	e^u

Compléter le tableau et Exercice 2

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives

Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe

Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

4) Opération sur les primitives

Rappeler la dérivée d'une somme de fonctions

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives

Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe

Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

4) Opération sur les primitives

Rappeler la dérivée d'une somme de fonctions

Propriété - Règles d'opérations des primitives

Soient F et G deux primitives respectives de f et de g sur un intervalle I et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$.
- λF est une primitive de λf.

4) Opération sur les primitives

Rappeler la dérivée d'une somme de fonctions

Propriété - Règles d'opérations des primitives

Soient F et G deux primitives respectives de f et de g sur un intervalle I et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$.
- λF est une primitive de λf.

Remarque : La preuve découle automatiquement des règles de calculs sur les dérivées : $(u+v)' = u' + v'$ et $(\lambda u)' = \lambda u'$.

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives

Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe

Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

4) Opération sur les primitives

Rappeler la dérivée d'une somme de fonctions

Propriété - Règles d'opérations des primitives

Soient F et G deux primitives respectives de f et de g sur un intervalle I et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$.
- λF est une primitive de λf.

Remarque : La preuve découle automatiquement des règles de calculs sur les dérivées : $(u + v)' = u' + v'$ et $(\lambda u)' = \lambda u'$.

Remarque : Les formules de dérivée d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de fonctions étant plus compliqués, on ne peut **rien** dire à propos de la primitive.

Exercice 3

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives

Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe

Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

II - Intégrale sur un segment

1) Définition à l'aide des primitives

Lien entre intégrale et primitive ?

II - Intégrale sur un segment

1) Définition à l'aide des primitives

Lien entre intégrale et primitive ?

Définition : Intégrale sur un segment

Soient f une fonction **continue** sur un segment $[a;b]$ et F est une **primitive** de f sur $[a;b]$.On appelle **intégrale de a à b de la fonction** f le réel

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives

Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe

Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

II - Intégrale sur un segment

1) Définition à l'aide des primitives

Lien entre intégrale et primitive ?

Définition : Intégrale sur un segment

Soient f une fonction **continue** sur un segment $[a;b]$ et F est une **primitive** de f sur $[a;b]$.On appelle **intégrale de a à b de la fonction** f le réel

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Remarque : Par convention, on notera $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exercice 4

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives
Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe
Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

Remarque : L'intégrale de a à b de la fonction f ne dépend pas de la primitive choisie. En effet, si G est une autre primitive de f , nous avons vu qu'il existe un réel k tel que $G = F + k$. On a alors :

$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$$

Remarque : L'intégrale de a à b de la fonction f ne dépend pas de la primitive choisie. En effet, si G est une autre primitive de f , nous avons vu qu'il existe un réel k tel que $G = F + k$. On a alors :

$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$$

Remarque : Comme dans les sommes, la variable d'intégration est une variable muette. Cela signifie que l'on peut la remplacer par n'importe quelle lettre :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment
Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives
Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe
Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

Remarque : L'intégrale de a à b de la fonction f ne dépend pas de la primitive choisie. En effet, si G est une autre primitive de f , nous avons vu qu'il existe un réel k tel que $G = F + k$. On a alors :

$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$$

Remarque : Comme dans les sommes, la variable d'intégration est une variable muette. Cela signifie que l'on peut la remplacer par n'importe quelle lettre :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$

Remarque : Pour c une constante, $\int_a^b c\ dt = (b - a)c$. Cela signifie que l'intégrale d'une constante est égale à "constante fois longueur de l'intervalle".

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives

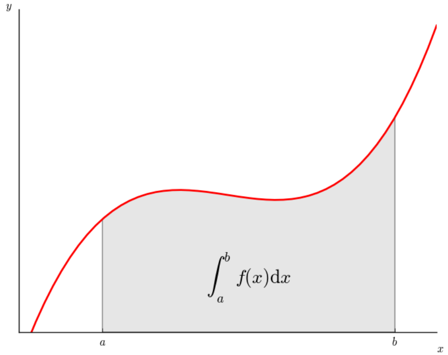
Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe

Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

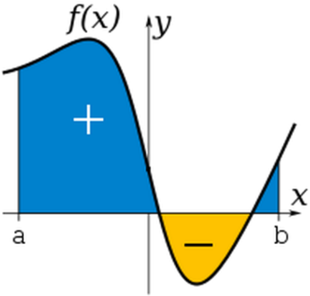
2) Définition à l'aide de l'aire sous la courbe

Propriété - Aire sous la courbe

Soit f est une fonction **continue** et **positive** sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est égal à l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ (exprimée en unité d'aire. (U.A.)



Remarque : Dans le cas où la fonction est négative, l'intégrale correspond à -1 fois l'aire sous la courbe. On parle alors d'aire signée (ou aire algébrique).



Exercice 5

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives

Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe

Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

III - Propriétés de l'intégrale

1) Inversion des bornes

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives

Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe

Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

III - Propriétés de l'intégrale

1) Inversion des bornes

Propriété - Inversion des bornes

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soient a et b deux réels de I.

- On a $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives
Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe
Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

III - Propriétés de l'intégrale

1) Inversion des bornes

Propriété - Inversion des bornes

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soient a et b deux réels de I.

- On a $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.
- On a $\int_a^a f(t)dt = 0$.

Preuve de la propriété

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives

Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe

Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

2) Relation de Chasles

Qu'appelle -t-on relation de Chasles ?

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives

Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe

Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

2) Relation de Chasles

Qu'appelle -t-on relation de Chasles ?

Théorème - Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a, b et c trois réels de I alors on a :

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

Preuve et Exercice 6

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives

Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe

Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

2) Relation de Chasles

Qu'appelle -t-on relation de Chasles ?

Théorème - Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a, b et c trois réels de I alors on a :

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

Preuve et Exercice 6

Propriété - Parité

Soit f une fonction continue sur $[-a;a]$ $(a > 0)$.

- Si f est paire sur $[-a;a]$ alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives

Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe

Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

2) Relation de Chasles

Qu'appelle -t-on relation de Chasles ?

Théorème - Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a, b et c trois réels de I alors on a :

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

Preuve et Exercice 6

Propriété - Parité

Soit f une fonction continue sur $[-a; a]$ $(a > 0)$.

- Si f est paire sur $[-a; a]$ alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.
- Si f est impaire sur $[-a; a]$ alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.

Chapitre 16: Primitives et intégration sur un segment

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives
Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe
Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

2) Relation de Chasles

Qu'appelle -t-on relation de Chasles ?

Théorème - Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a, b et c trois réels de I alors on a :

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

Preuve et Exercice 6

Propriété - Parité

Soit f une fonction continue sur $[-a; a]$ $(a > 0)$.

- Si f est paire sur $[-a; a]$ alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt.$
- Si f est impaire sur $[-a; a]$ alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0.$

Exercice 7

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives
Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe
Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

3) Linéarité

Que dire de $\int_a^b \lambda f(t)dt$ *et* $\int_a^b f(t)+g(t)dt$ *?*

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives
Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe
Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

3) Linéarité

Que dire de $\int_a^b \lambda f(t)dt$ et $\int_a^b f(t)+g(t)dt$?

Propriété - Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a;b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

$$\int_a^b f(t)+g(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

Exercice 8

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives
Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe
Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

4) Primitive nulle en un point

Primitive
Définition
Primitives et fonctions usuelles
Utilisation des formules de dérivation
Opération sur les primitives
Intégrale sur un segment
Définition à l'aide des primitives
Définition à l'aide de l'aire sous la courbe
Propriétés de l'intégrale
Inversion des bornes
Relation de Chasles
Linéarité
Primitive nulle en un point

4) Primitive nulle en un point

Théorème - Primitive d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $x_0 \in I$. la fonction

$$F : x \to \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0. Ainsi F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $F' = f$.

Preuve du théorème et Exercice 9