Chapitre 15: Séries numériques

Savoir Faire:

- Étude de convergence d'une série en passant par les sommes partielles.
- Étude de séries géométriques ou exponentielles
- Comparaison entre les séries.

Le paradoxe de Zénon d'Élée

Le paradoxe d'Achille et de la tortue, formulé par Zénon d'Élée, dit qu'un jour, le héros grec Achille a disputé une course à pied avec une tortue. Achille avait accordé gracieusement à la tortue une avance de cent mètres. Un raisonnement, en apparence logique, dit qu'Achille ne pourra malheureusement jamais rattraper la tortue. Vous pouvez retrouver les explications du paradoxe de Zénon à l'adresse :

`https://youtu.be/u7Z9UnWOJNY`

Le paradoxe de Zénon d'Élée

Le paradoxe d'Achille et de la tortue, formulé par Zénon d'Élée, dit qu'un jour, le héros grec Achille a disputé une course à pied avec une tortue. Achille avait accordé gracieusement à la tortue une avance de cent mètres. Un raisonnement, en apparence logique, dit qu'Achille ne pourra malheureusement jamais rattraper la tortue. Vous pouvez retrouver les explications du paradoxe de Zénon à l'adresse :

`https://youtu.be/u7Z9UnWOJNY`

I - Convergence des séries

1) Séries et sommes partielles

Le paradoxe de Zénon d'Élée

Le paradoxe d'Achille et de la tortue, formulé par Zénon d'Élée, dit qu'un jour, le héros grec Achille a disputé une course à pied avec une tortue. Achille avait accordé gracieusement à la tortue une avance de cent mètres. Un raisonnement, en apparence logique, dit qu'Achille ne pourra malheureusement jamais rattraper la tortue. Vous pouvez retrouver les explications du paradoxe de Zénon à l'adresse :

`https://youtu.be/u7Z9UnWOJNY`

I - Convergence des séries

1) Séries et sommes partielles

Remarque : On a vu dans différentes partie du cours que l'on peut définir des suites avec des sommes. Certaines de ces suites, comme $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tendent vers $+\infty$, d'autres comme $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ convergent.

Exercice 1

Du coup, qu'est-ce qu'une série ?

Du coup, qu'est-ce qu'une série ?

Définition : Série et somme partielle

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

Du coup, qu'est-ce qu'une série ?

Définition : Série et somme partielle

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Du coup, qu'est-ce qu'une série ?

Définition : Série et somme partielle

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
- S_n est appelée **somme partielle d'indice n** et u_n est appelé le **terme général** de la série

Du coup, qu'est-ce qu'une série ?

Définition : Série et somme partielle

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
- S_n est appelée **somme partielle d'indice n** et u_n est appelé le **terme général** de la série

Remarque :

- On note la série réelle de terme général u_n : $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ou $\sum u_n$.

Du coup, qu'est-ce qu'une série ?

Définition : Série et somme partielle

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
- S_n est appelée **somme partielle d'indice n** et u_n est appelé le **terme général** de la série

Remarque :

- On note la série réelle de terme général u_n : $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ou $\sum u_n$.
- D'après la définition, étudier la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ revient à étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

2) Convergence des séries

Comment définir la convergence d'une série ?

2) Convergence des séries

Comment définir la convergence d'une série ?

Définition : Convergence des séries

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que la série $\sum u_n$ **converge** lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas la limite finie de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, est appelée **somme de la série**.

2) Convergence des séries

Comment définir la convergence d'une série ?

Définition : Convergence des séries

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que la série $\sum u_n$ **converge** lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas la limite finie de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$, est appelée **somme de la série**.
- On dit que la série $\sum u_n$ **diverge** lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

Exercice 3

Remarque :

- Attention !

Remarque :

- Attention ! La notation $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ n'a de sens que si la série converge. Dans ce cas : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$.
  Si la série ne converge pas, on dira la série $\sum u_n$ diverge sans faire apparaître le signe $+\infty$.

Remarque :

- Attention ! La notation $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ n'a de sens que si la série converge. Dans ce cas : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$.
  Si la série ne converge pas, on dira la série $\sum u_n$ diverge sans faire apparaître le signe $+\infty$.
- Il existe des séries pour lesquelles on sait directement calculer la somme et ainsi savoir si elles sont convergentes ou non. Par exemple, les séries télescopiques, les séries géométriques etc... Pour les autres, on va introduire des outils nous permettant de savoir si ces séries sont convergentes sans forcément savoir calculer la somme (de la même manière que pour les suites).

Exercice 4

Remarque : Les sommes infinies ne se manipulent pas comme les sommes finies. En général, on calculera d'abord les sommes partielles ,qui sont finies, puis on passera à la limite.

Remarque : Les sommes infinies ne se manipulent pas comme les sommes finies. En général, on calculera d'abord les sommes partielles ,qui sont finies, puis on passera à la limite.

Niels Henrik Abel (1802-1829) est un mathématicien norvégien. Il est connu pour ses travaux en analyse mathématique sur la semi-convergence des séries numériques. Il a dit des séries :

Les séries divergentes sont une invention du diable et c'est une honte qu'on ose fonder sur elles la moindre démonstration. On peut tirer d'elles tout ce qu'on veut quand on les emploie et ce sont elles qui ont produit tant d'échecs et tant de paradoxes. [. . .] Mes amis, voici quelque chose dont il faut se moquer.

Remarque : Les sommes infinies ne se manipulent pas comme les sommes finies. En général, on calculera d'abord les sommes partielles ,qui sont finies, puis on passera à la limite.

Niels Henrik Abel (1802-1829) est un mathématicien norvégien. Il est connu pour ses travaux en analyse mathématique sur la semi-convergence des séries numériques. Il a dit des séries :

Les séries divergentes sont une invention du diable et c'est une honte qu'on ose fonder sur elles la moindre démonstration. On peut tirer d'elles tout ce qu'on veut quand on les emploie et ce sont elles qui ont produit tant d'échecs et tant de paradoxes. [...] Mes amis, voici quelque chose dont il faut se moquer.

Montrer que $1+2+3+\ldots=-1/12$

3) Propriétés des séries convergentes

Si une série $\sum u_n$ converge, que dire de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3) Propriétés des séries convergentes

Si une série $\sum u_n$ converge, que dire de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Propriété -

Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Preuve directe de la propriété.

3) Propriétés des séries convergentes

Si une série $\sum u_n$ converge, que dire de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Propriété -

Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Preuve directe de la propriété.

Remarque : cette proposition est très utile pour montrer qu'une série diverge, en utilisant sa contraposée :

3) Propriétés des séries convergentes

Si une série $\sum u_n$ converge, que dire de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Propriété -

Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Preuve directe de la propriété.

Remarque : cette proposition est très utile pour montrer qu'une série diverge, en utilisant sa contraposée :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \quad \Longrightarrow \sum u_n \text{ diverge}$$

3) Propriétés des séries convergentes

Si une série $\sum u_n$ converge, que dire de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Propriété -

Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Preuve directe de la propriété.

Remarque : cette proposition est très utile pour montrer qu'une série diverge, en utilisant sa contraposée :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \quad \Longrightarrow \sum u_n \text{ diverge}$$

Remarque : Attention ! Erreur classique ! La réciproque de cette proposition est fausse !

Illustration des remarques

Propriété - Linéarité des séries convergentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et λ un réel non nul.

Propriété - Linéarité des séries convergentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et λ un réel non nul.

- Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \lambda u_n$ sont de **même nature** et lorsqu'elles convergent, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Propriété - Linéarité des séries convergentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et λ un réel non nul.

- Les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \lambda u_n$ sont de **même nature** et lorsqu'elles convergent, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

- Si les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ **convergent**, alors la série de terme général $u_n + v_n$ converge et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

Exercice 5 et *Exercice 6*

II - Séries usuelles

1) Série géométrique

Que dire de la convergence des $\sum_{n \geqslant 0} q^n$ *?*

II - Séries usuelles

1) Série géométrique

Que dire de la convergence des $\sum_{n \geqslant 0} q^n$ *?*

Propriété - Série géométrique

La série $\sum_{n \geqslant 0} q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

II - Séries usuelles

1) Série géométrique

Que dire de la convergence des $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ *?*

Propriété - Série géométrique

La série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Exemple -

La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$ converge et vaut 2 comme on l'a vu en introduction.

Preuve directe de la propriété et Exercice 7

2) Série géométrique "dérivée"

Que dire de la convergence des $\sum_{n\geqslant 0} nq^n$ *?*

2) Série géométrique "dérivée"

Que dire de la convergence des $\sum_{n\geqslant 0} nq^n$ *?*

Propriété - Série géométrique "dérivée"

- La série $\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ converge si et seulement si $|q|<1$ et dans ce cas : $$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

2) Série géométrique "dérivée"

Que dire de la convergence des $\sum_{n\geqslant 0} nq^n$ *?*

Propriété - Série géométrique "dérivée"

- La série $\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ converge si et seulement si $|q|<1$ et dans ce cas : $$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$
- La série $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ converge si et seulement si $|q|<1$ et dans ce cas : $$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Preuve directe du premier point et Exercice 8

3) Série de Riemann

Mathématicien allemand du XIX^e siècle, Riemann a travaillé dans de nombreux domaines des mathématiques (analyse, géométrie, intégrales, nombres premiers). Un des problèmes du millénaire porte son nom.

3) Série de Riemann

Mathématicien allemand du XIX^e siècle, Riemann a travaillé dans de nombreux domaines des mathématiques (analyse, géométrie, intégrales, nombres premiers). Un des problèmes du millénaire porte son nom.

Définition : Série de Riemann

La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ est appelée série de Riemann.

3) Série de Riemann

Mathématicien allemand du XIX^e siècle, Riemann a travaillé dans de nombreux domaines des mathématiques (analyse, géométrie, intégrales, nombres premiers). Un des problèmes du millénaire porte son nom.

Définition : Série de Riemann

La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ est appelée série de Riemann.

Théorème - Série de Riemann

La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

3) Série de Riemann

Mathématicien allemand du XIX^e siècle, Riemann a travaillé dans de nombreux domaines des mathématiques (analyse, géométrie, intégrales, nombres premiers). Un des problèmes du millénaire porte son nom.

Définition : Série de Riemann

La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ est appelée série de Riemann.

Théorème - Série de Riemann

La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque : Même si la série converge, on ne connait pas la valeur exacte de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

Exemples de série de Riemann convergentes ou divergentes.

4) Série exponentielle

4) Série exponentielle

Propriété - Série exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série exponentielle $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

4) Série exponentielle

Propriété - Série exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série exponentielle $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Déterminer si une série converge ou non.
Pour déterminer si une série converge ou non, et éventuellement calculer sa limite, on essaiera si possible de se ramener à une des séries usuelles (géométriques, Riemann ou exponentielle).

Exercice 9

III - Conditions de convergences

Après avoir étudié la convergence de quelques séries particulières, on s'intéresse maintenant à des critères de convergences pour des séries quelconque. Les théorèmes suivants nous donnent en général l'existence d'une limite mais ne permettent pas de trouver la somme.

III - Conditions de convergences

Après avoir étudié la convergence de quelques séries particulières, on s'intéresse maintenant à des critères de convergences pour des séries quelconque. Les théorèmes suivants nous donnent en général l'existence d'une limite mais ne permettent pas de trouver la somme.

1) Suites et séries

Théorème - Convergence d'une suite

Soit (u_n) une suite. Alors (u_n) converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ converge. Dans ce cas, en notant ℓ la limite de (u_n), on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k)=\ell-u_0.$$

Preuve du théorème et Exercice 10

2) Séries à termes positifs

L'étude des séries avec des termes positifs est souvent plus simple à étudier.

2) Séries à termes positifs

L'étude des séries avec des termes positifs est souvent plus simple à étudier.

Théorème -

Soit (u_n) une suite à termes positifs. Alors la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles (S_n) est majorée.

2) Séries à termes positifs

L'étude des séries avec des termes positifs est souvent plus simple à étudier.

Théorème -

Soit (u_n) une suite à termes positifs. Alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles (S_n) est majorée.

Majorer une somme partielle

Pour majorer $S_n = \sum u_k$, on commence en général par majorer (u_n). On somme alors ces majorants pour en déduire un majorant de (S_n).

Preuve du théorème par double implication et Exercice 11

Quel est le théorème de comparaison pour les suites ?

Quel est le théorème de comparaison pour les suites ?

Théorème - de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à **termes positifs**. On suppose que pour tout n,

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

Quel est le théorème de comparaison pour les suites ?

Théorème - de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à **termes positifs**. On suppose que pour tout n,

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

Alors, si la série $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ est convergente alors la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est convergente. Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

Quel est le théorème de comparaison pour les suites ?

Théorème - de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à **termes positifs**. On suppose que pour tout n,

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

Alors, si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} v_n$ est convergente alors la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ est convergente. Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

Si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ diverge vers $+\infty$ alors la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} v_n$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 12

3) Convergence absolue.

Dans les cas où la série n'est pas à terme positif, nous allons utiliser la notion de convergence absolue.

3) Convergence absolue.

Dans les cas où la série n'est pas à terme positif, nous allons utiliser la notion de convergence absolue.

Définition : Convergence absolue

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

3) Convergence absolue.

Dans les cas où la série n'est pas à terme positif, nous allons utiliser la notion de convergence absolue.

Définition : Convergence absolue

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème - Convergence absolue

Si une série est absolument convergente alors elle est convergente

3) Convergence absolue.

Dans les cas où la série n'est pas à terme positif, nous allons utiliser la notion de convergence absolue.

Définition : Convergence absolue

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème - Convergence absolue

Si une série est absolument convergente alors elle est convergente

Remarque : La réciproque n'est pas vraie : une série peut être convergent sans être absolument convergente. Par exemple, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n}$ n'est pas absolument convergente mais elle est convergente (cf. Exercice 21)

Exercice 13

4) Étudier une série

Étudier une série

Pour étudier une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, on suit différentes étapes

1. On vérifie que la suite (u_n) tend vers 0. Si non, la série est divergente.
2. On pose la suite des sommes partielles (S_n) et on vérifie si on peut la calculer. Si oui, on peut conclure quant à la convergence, et la valeur de la somme le cas échéant.
3. On vérifie si on peut se ramener à une série de référence (géométrique et dérivées, Riemann, exponentielle). Si oui, on peut conclure quant à la convergence, et la valeur de la somme le cas échéant.
4. Si tout ce qui précède n'a pas abouti et que la série est à terme positif, on essaie de majorer (ou minorer) les sommes partielles (S_n) ou la suite (u_n).
5. Si tout ce qui précède n'a pas abouti et que la série n'est pas à termes positifs, on s'intéresse à la convergence absolue.