

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivé

Inégalité des accroissements finis

Chapitre 14: Calcul différentiel

Savoir Faire:

- Déterminer la dérivabilité d'une fonction en un point ou sur un intervalle
- Calculer la dérivée d'une fonction sur un intervalle.
- Étude de fonctions, interprétation graphique.
- Utiliser l'inégalité des accroissements finis.
- Manipuler les développements limités d'ordre 1.

I - Dérivabilité en un point

1) Modélisation de la vitesse et du coût marginal



Quelle est la formule de la vitesse ?

I - Dérivabilité en un point

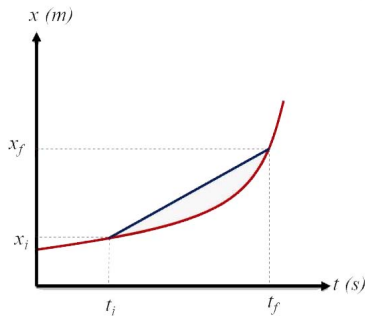
1) Modélisation de la vitesse et du coût marginal



Quelle est la formule de la vitesse ?



On considère une voiture qui se déplace en ligne droite. La distance qu'elle parcourt en fonction du temps est donnée par la courbe suivante - Quelle est sa vitesse moyenne entre les temps t_i et t_f ?



I - Dérivabilité en un point

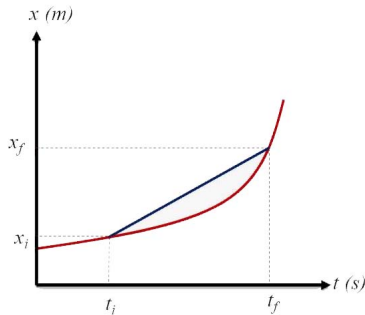
1) Modélisation de la vitesse et du coût marginal



Quelle est la formule de la vitesse ?



On considère une voiture qui se déplace en ligne droite. La distance qu'elle parcourt en fonction du temps est donnée par la courbe suivante - Quelle est sa vitesse moyenne entre les temps t_i et t_f ?



Quelle est la vitesse instantanée ?

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

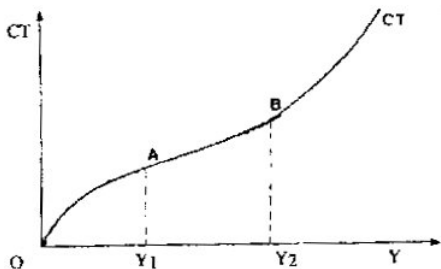
Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivé

Inégalité des accroissements finis

👁️ On considère une entreprise produisant des objets dont le coût de production C est une fonction de la quantité d'objet produit. Quel est le coût marginal de la 10^{ème} unité fabriquée ?



Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

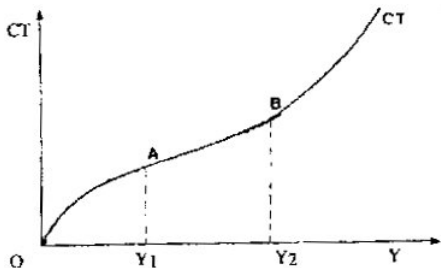
Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivé

Inégalité des accroissements finis

👁 On considère une entreprise produisant des objets dont le coût de production C est une fonction de la quantité d'objet produit. Quel est le coût marginal de la 10^{ème} unité fabriquée ?



👁 On considère maintenant une entreprise dont le coût de production C est une fonction de q la quantité d'objet produit exprimée en million d'unité. Exprimer le coût marginal de la 10^{millionième} unité produite.

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

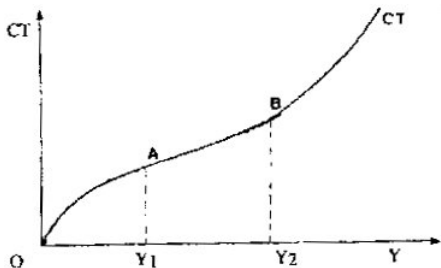
Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivé

Inégalité des accroissements finis

👁 On considère une entreprise produisant des objets dont le coût de production C est une fonction de la quantité d'objet produit. Quel est le coût marginal de la 10^{ème} unité fabriquée ?



👁 On considère maintenant une entreprise dont le coût de production C est une fonction de q la quantité d'objet produit exprimée en million d'unité. Exprimer le coût marginal de la 10^{millionième} unité produite.

2) Dérivabilité en un point



Rappeler les limites avec le taux d'accroissement

2) Dérivabilité en un point



Rappeler les limites avec le taux d'accroissement

Définition : Dérivabilité en un point

On dit que la fonction f est **dérivable en** x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé de f en x_0** et notée $f'(x_0)$.

2) Dérivabilité en un point



Rappeler les limites avec le taux d'accroissement

Définition : Dérivabilité en un point

On dit que la fonction f est **dérivable en** x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé de f en** x_0 et notée $f'(x_0)$.



Remarque :

- On a aussi $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

2) Dérivabilité en un point



Rappeler les limites avec le taux d'accroissement

Définition : Dérivabilité en un point

On dit que la fonction f est **dérivable en** x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé de f en** x_0 et notée $f'(x_0)$.



Remarque :

• On a aussi $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

• Comme dans le cas de la continuité, il est nécessaire pour la fonction d'être définie au point x_0 pour y être dérivable.



Exercice 1

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivée

Inégalité des accroissements finis

Exemple - Taux d'accroissement usuels

On rappelle les deux taux d'accroissements classique :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = e^0 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Exemple - Taux d'accroissement usuels

On rappelle les deux taux d'accroissements classiques :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = e^0 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Propriété -

Si la fonction f est **dérivable** en x_0 , alors elle est **continue** en x_0 .



Remarque : Attention ! La réciproque est fautive !

Exemple - Taux d'accroissement usuels

On rappelle les deux taux d'accroissements classique :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = e^0 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Propriété -

Si la fonction f est **dérivable** en x_0 , alors elle est **continue** en x_0 .



Remarque : Attention ! La réciproque est fausse !



Donner un exemple de fonction f continue en un point x_0 mais non dérivable en ce point.

Exemple - Taux d'accroissement usuels

On rappelle les deux taux d'accroissements classique :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = e^0 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Propriété -

Si la fonction f est **dérivable** en x_0 , alors elle est **continue** en x_0 .



Remarque : Attention ! La réciproque est fausse !



Donner un exemple de fonction f continue en un point x_0 mais non dérivable en ce point.



Remarque : La contraposée dit qu'une fonction non continue n'est pas dérivable.

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivés et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivée

Inégalité des accroissements finis

3) Dérivabilité à droite et à gauche



En s'inspirant de la continuité, comment définir la dérivabilité à gauche et à droite.

3) Dérivabilité à droite et à gauche



En s'inspirant de la continuité, comment définir la dérivabilité à gauche et à droite.

Définition : Dérivabilité à droite et à gauche

- On dit que la fonction f est **dérivable à gauche en x_0** lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé à gauche** et notée $f'_g(x_0)$

3) Dérivabilité à droite et à gauche



En s'inspirant de la continuité, comment définir la dérivabilité à gauche et à droite.

Définition : Dérivabilité à droite et à gauche

- On dit que la fonction f est **dérivable à gauche** en x_0 lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé à gauche** et notée $f'_g(x_0)$
- On dit que la fonction f est **dérivable à droite** en x_0 lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé à droite** et notée $f'_d(x_0)$



Exercice 2

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivés et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivée

Inégalité des accroissements finis



Rappeler le lien entre continuité, continuité à gauche, et continuité à droite.

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivée

Inégalité des accroissements finis



Rappeler le lien entre continuité, continuité à gauche, et continuité à droite.



Remarque : A la différence de la continuité, il n'est pas suffisant pour être dérivable en un point d'être dérivable à gauche et à droite ! Il faut une condition supplémentaire.

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivée

Inégalité des accroissements finis



Rappeler le lien entre continuité, continuité à gauche, et continuité à droite.



Remarque : A la différence de la continuité, il n'est pas suffisant pour être dérivable en un point d'être dérivable à gauche et à droite ! Il faut une condition supplémentaire.

Propriété - Dérivabilité à gauche et à droite

On suppose que I est un intervalle ouvert. f est **dérivable** en x_0 si et seulement si f est dérivable à **gauche** et à **droite** en x_0 et que

$$f'_g(x_0) = f'_d(x_0).$$

On a alors dans ce cas-là : $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$.



Exercice 3

4) Interprétation graphique



Lien avec les tangentes.

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivée

Inégalité des accroissements finis

4) Interprétation graphique



Lien avec les tangentes.

Propriété - Tangente

On note C_f la courbe représentative de f .

- 1 Si f est dérivable en x_0 alors C_f admet une tangente au point $(x_0, f(x_0))$ dont le coefficient directeur est donné par $f'(x_0)$ et l'équation par

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivée

Inégalité des accroissements finis

4) Interprétation graphique



Lien avec les tangentes.

Propriété - Tangente

On note C_f la courbe représentative de f .

- 1 Si f est dérivable en x_0 alors C_f admet une tangente au point $(x_0, f(x_0))$ dont le coefficient directeur est donné par $f'(x_0)$ et l'équation par

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

- 2 Si f n'est pas dérivable en x_0 et que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ alors C_f admet une tangente verticale au point $(x_0, f(x_0))$.

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivé

Inégalité des accroissements finis

4) Interprétation graphique



Lien avec les tangentes.

Propriété - Tangente

On note C_f la courbe représentative de f .

- 1 Si f est dérivable en x_0 alors C_f admet une tangente au point $(x_0, f(x_0))$ dont le coefficient directeur est donné par $f'(x_0)$ et l'équation par

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

- 2 Si f n'est pas dérivable en x_0 et que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ alors C_f admet une tangente verticale au point $(x_0, f(x_0))$.



Remarque : Si la fonction est dérivable uniquement à droite (resp. à gauche), on parle de demi-tangente en remplaçant f' par f'_d (resp. f'_g).



Exercice 4

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivée

Inégalité des accroissements finis



Que se passe-t-il lorsque la dérivée est nulle.

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivée

Inégalité des accroissements finis



Que se passe-t-il lorsque la dérivée est nulle.



Remarque : Lorsque la courbe représentative d'une fonction admet une tangente au point d'abscisse x_0 dont le coefficient directeur est nul, on dit que la tangente est horizontale.

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivé

Inégalité des accroissements finis



Que se passe-t-il lorsque la dérivée est nulle.



Remarque : Lorsque la courbe représentative d'une fonction admet une tangente au point d'abscisse x_0 dont le coefficient directeur est nul, on dit que la tangente est horizontale.



Remarque : Lorsque la courbe représentative d'une fonction admet deux demies tangentes en un point d'abscisse x_0 , on dit que ce point est anguleux.



Dessin et Exercice 5



Que se passe-t-il lorsque la dérivée est nulle.



Remarque : Lorsque la courbe représentative d'une fonction admet une tangente au point d'abscisse x_0 dont le coefficient directeur est nul, on dit que la tangente est horizontale.



Remarque : Lorsque la courbe représentative d'une fonction admet deux demies tangentes en un point d'abscisse x_0 , on dit que ce point est anguleux.



Dessin et Exercice 5



Remarque : Lorsque la courbe représentative d'une fonction admet deux demies tangentes verticales en un point d'abscisse x_0 , on dit que ce point un point de rebroussement.



Dessin et Exercice 6

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivée

Inégalité des accroissements finis

5) Développement limité à l'ordre 1



Tangente et développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivé

Inégalité des accroissements finis

5) Développement limité à l'ordre 1



Tangente et développement limité à l'ordre 1

Propriété - Développement limité à l'ordre 1

Si f est dérivable en x_0 alors il existe une fonction ε définie sur I tels que :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On dit alors que $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ est un **développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x_0** de la fonction f



Exercice 7

II - Dérivabilité sur un intervalle

1) Dérivés et opérations



Dérivabilité sur un intervalle

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivés et opérations

Dérivés de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivés

Inégalité des accroissements finis

II - Dérivabilité sur un intervalle

1) Dérivés et opérations



Dérivabilité sur un intervalle

Définition : Dérivabilité sur un intervalle

On dit que la fonction f est **dérivable sur I** lorsque f est dérivable en tout x appartenant à I .

On appelle alors **fonction dérivée de f** , notée f' la fonction qui à tout réel x de I associe son nombre dérivé $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivés et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivé

Inégalité des accroissements finis

II - Dérivabilité sur un intervalle

1) Dérivés et opérations



Dérivabilité sur un intervalle

Définition : Dérivabilité sur un intervalle

On dit que la fonction f est **dérivable sur I** lorsque f est dérivable en tout x appartenant à I .

On appelle alors **fonction dérivée de f** , notée f' la fonction qui à tout réel x de I associe son nombre dérivé $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$



Remarque : On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur I si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I .



Montrer que la fonction $x \rightarrow x^2$ est dérivable pour $x_0 \in \mathbb{R}$.

II - Dérivabilité sur un intervalle

1) Dérivés et opérations



Dérivabilité sur un intervalle

Définition : Dérivabilité sur un intervalle

On dit que la fonction f est **dérivable sur I** lorsque f est dérivable en tout x appartenant à I .

On appelle alors **fonction dérivée de f** , notée f' la fonction qui à tout réel x de I associe son nombre dérivé $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$



Remarque : On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur I si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I .



Montrer que la fonction $x \rightarrow x^2$ est dérivable pour $x_0 \in \mathbb{R}$.

Propriété - Fonctions dérivables



Donner les fonctions usuelles dérivables et les formules

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivés et opérations

Dérivés de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivés

Inégalité des accroissements finis

Dérivées et opérations			
Dans ce formulaire, u et v sont des fonctions			
Opérations sur les fonctions		Dérivées	Conditions
$f = u + v$			u et v dérivables sur un intervalle I
$f = ku$ (k constante)			u dérivable sur un intervalle I
$f = uv$			u et v dérivables sur un intervalle I
$f = \frac{1}{v}$			v dérivable sur un intervalle I et v ne s'annule pas sur cet intervalle I
$f = \frac{u}{v}$			u et v dérivables sur un intervalle I et v ne s'annule pas sur cet intervalle I
1	$f = v \circ u$	$f' = u' \times (v' \circ u)$	u dérivable sur un intervalle I à valeurs dans J , et, v dérivable sur J .
	$f = u^\alpha$		selon les valeurs de α
	$f = \sqrt{u}$		u dérivable sur un intervalle I et $u > 0$
	$f = e^u$		u dérivable sur un intervalle I
	$f = \ln u$		u dérivable sur un intervalle I et $u > 0$
	$f(x) = u(ax + b)$		$ax + b$ appartient à un intervalle sur lequel u est dérivable



Compléter le tableau et Exercice 8

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivée de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivé

Inégalité des accroissements finis

2) Dérivée de f^{-1}



Rappeler la définition de la fonction réciproque et dériver cette expression.

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivée de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivée

Inégalité des accroissements finis

2) Dérivée de f^{-1}



Rappeler la définition de la fonction réciproque et dériver cette expression.

Propriété - Dérivée de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I , f^{-1} sa fonction **réciproque** définie sur $J = f(I)$. Si f est **dérivable** sur I et si f' ne s'annule pas, la fonction f^{-1} est **dérivable** sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$



Retrouver la dérivée de la fonction \ln en utilisant la dérivée inverse de l'exp.

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivée de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivé

Inégalité des accroissements finis



Montrer que f^{-1} dérivable en un réel y_0 .

Pour montrer que f^{-1} est dérivable en réel y_0 :

- 1 On écrit $y_0 = f(x_0)$ (soit $x_0 = f^{-1}(y_0)$) et on montre que f est dérivable en x_0 .
- 2 On s'assure que $f'(x_0) \neq 0$. On peut alors conclure que f^{-1} est dérivable en y_0 , et que

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$



Exercice 9

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivée

Inégalité des accroissements finis

III - Applications de la dérivation

1) Dérivée nulle sur un intervalle



Que peut-on dire lorsque la dérivée est nulle ?

III - Applications de la dérivation

1) Dérivée nulle sur un intervalle



Que peut-on dire lorsque la dérivée est nulle ?

Propriété - Dérivée nulle

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . Alors f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) = 0$.

III - Applications de la dérivation

1) Dérivée nulle sur un intervalle



Que peut-on dire lorsque la dérivée est nulle ?

Propriété - Dérivée nulle

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . Alors f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) = 0$.



Remarque : Si l'on a f et g dérivables sur un intervalle I .

On a alors

$$f' = g' \Leftrightarrow f = g + cte$$



Montrer la remarque et trouver un contre exemple quand I n'est pas un intervalle.

2) Monotonie et dérivée



Sens de variation de f en fonction de sa dérivée ?

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivée

Inégalité des accroissements finis

2) Monotonie et dérivée



Sens de variation de f en fonction de sa dérivée ?

Théorème - Sens de variation

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . Alors

- f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$)

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivé

Inégalité des accroissements finis

2) Monotonie et dérivée



Sens de variation de f en fonction de sa dérivée ?

Théorème - Sens de variation

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . Alors

- f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$)
- f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si f' est strictement positive sur I (resp. strictement négative) sauf éventuellement en un nombre fini de réels où f' s'annule.

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivé

Inégalité des accroissements finis

2) Monotonie et dérivée



Sens de variation de f en fonction de sa dérivée ?

Théorème - Sens de variation

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . Alors

- f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$)
- f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si f' est strictement positive sur I (resp. strictement négative) sauf éventuellement en un nombre fini de réels où f' s'annule.

Exemple - Fonction cube

La dérivée de la fonction $x \rightarrow x^3$ est strictement positive sauf en 0. Cette fonction est strictement croissante.



Exercice 10

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivée

Inégalité des accroissements finis

3) Extremum et nombre dérivée



Rappeler ce qu'est un extremum (local, global) ?

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivée

Inégalité des accroissements finis

3) Extremum et nombre dérivée



Rappeler ce qu'est un extremum (local, global) ?

Propriété - Extremum et dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un point de I . f possède un extrémum local en x_0 si et seulement si $f'(x_0) = 0$ et f' change de signe en x_0 .

3) Extremum et nombre dérivée



Rappeler ce qu'est un extremum (local, global) ?

Propriété - Extremum et dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un point de I . f possède un extrémum local en x_0 si et seulement si $f'(x_0) = 0$ et f' change de signe en x_0 .



Remarque : Si f' passe du négatif au positif, l'extremum est un minimum (ex : $x \rightarrow x^2$) et si f' passe du positif au négatif, l'extremum est un maximum (ex : $x \rightarrow -x^2$)

3) Extremum et nombre dérivée



Rappeler ce qu'est un extremum (local, global) ?

Propriété - Extremum et dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un point de I . f possède un extrémum local en x_0 si et seulement si $f'(x_0) = 0$ et f' change de signe en x_0 .



Remarque : Si f' passe du négatif au positif, l'extremum est un minimum (ex : $x \rightarrow x^2$) et si f' passe du positif au négatif, l'extremum est un maximum (ex : $x \rightarrow -x^2$)



Remarque : $f'(x) = 0$ est insuffisant. En effet la fonction cube, notée f , vérifie $f'(0) = 0$ et pourtant 0 n'est pas un extrémum de f .



Déterminer les extrema de la fonction $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x - 1$

Dérivabilité en un point

Modélisation de la vitesse et du coût marginal

Dérivabilité en un point

Dérivabilité à droite et à gauche

Interprétation graphique

Développement limité à l'ordre 1

Dérivabilité sur un intervalle

Dérivées et opérations

Dérivées de f^{-1}

Applications de la dérivation

Dérivée nulle sur un intervalle

Monotonie et dérivée

Extremum et nombre dérivé

Inégalité des accroissements finis

4) Inégalité des accroissements finis

4) Inégalité des accroissements finis

Théorème - Inégalités des accroissements finis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . S'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in I, m \leq f'(x) \leq M$ alors pour tout $(a, b) \in I^2$ tels que $a \leq b$ alors on a

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$



Démonstration directe et Exercice 11

4) Inégalité des accroissements finis

Théorème - Inégalités des accroissements finis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . S'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in I, m \leq f'(x) \leq M$ alors pour tout $(a, b) \in I^2$ tels que $a \leq b$ alors on a

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$



Démonstration directe et Exercice 11

Corollaire

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . S'il existe un réel K tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq K$ alors pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$|f(b) - f(a)| \leq K |b - a|$$



Exercice 12