

# Chapitre 13: Convergence de suites



## Savoir Faire:

- Calculer des limites de suites sous forme explicite, déterminer la convergence d'une suite usuelle.
- Déterminer la nature d'une suite à l'aide d'inégalités
- Appliquer le théorème de convergence monotone
- Montrer que deux suites sont adjacentes
- Utiliser le théorème du point fixe pour déterminer une limite.



Quelles sont les limites de  $u_n = 1 + \frac{1}{n}$  ?  $v_n = \frac{e^{-n}}{n}$  ?



La convergence des suites de la forme  $u_n = f(n)$  est semblable à l'étude des limites de fonctions en  $+\infty$ . Mais la plupart du temps, nous n'avons pas de formules explicites pour la suite. L'étude de la convergence est alors complètement différente.



La convergence des suites de la forme  $u_n = f(n)$  est semblable à l'étude des limites de fonctions en  $+\infty$ . Mais la plupart du temps, nous n'avons pas de formules explicites pour la suite. L'étude de la convergence est alors complètement différente.

## I - Convergence de suites quelconques

### 1) Définitions

#### Définition : Convergence d'une suite

On dit qu'une suite  $(u_n)$  est **convergente** lorsqu'elle admet une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$ . Intuitivement c'est dire qu'  $u_n$  est aussi proche que l'on veut de  $\ell$  dès que  $n$  est suffisamment grand. Mathématiquement cela se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

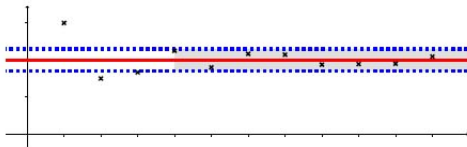
On note alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  ou parfois  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .



### Exercice 1



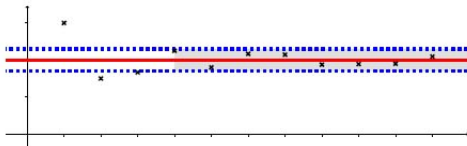
**Remarque :** Si une suite  $(u_n)$  a une limite finie alors celle-ci est unique.



Exemple de suite convergente



**Remarque :** Si une suite  $(u_n)$  a une limite finie alors celle-ci est unique.



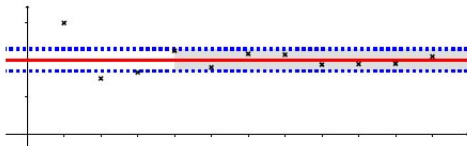
Exemple de suite convergente



*Et si une suite n'est pas convergente ?*



**Remarque** : Si une suite  $(u_n)$  a une limite finie alors celle-ci est unique.



Exemple de suite convergente



*Et si une suite n'est pas convergente ?*

### Définition : Suites divergente

On dit qu'une suite  $(u_n)$  est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

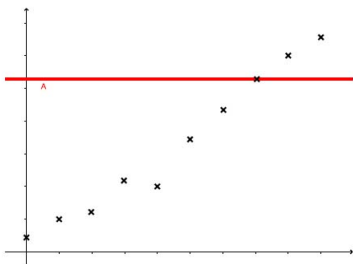


*Donner des exemples de suites divergentes*

## Définition : Divergence en l'infini

On dit qu'une suite a pour limite  $+\infty$  ou diverge vers  $+\infty$  (resp  $-\infty$ ) si  $u_n$  est aussi grand que l'on veut dès que  $n$  est suffisamment grand soit :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A \text{ (resp } u_n \leq A)$$



Exemple de suite divergente en  $+\infty$



### Exercice 2



## Nature d'une suite

Étudier la **nature** d'une suite revient à déterminer si elle est **convergente** ou **divergente**. On a donc deux situations de suites **divergentes** :

- soit la suite admet une limite infinie (ex :  $u_n = n$ )
- soit la suite n'admet pas de limite (ex :  $v_n = (-1)^n$ )



## Nature d'une suite

Étudier la **nature** d'une suite revient à déterminer si elle est **convergente** ou **divergente**. On a donc deux situations de suites **divergentes** :

- soit la suite admet une limite infinie (ex :  $u_n = n$ )
- soit la suite n'admet pas de limite (ex :  $v_n = (-1)^n$ )

## 2) Suites de la forme $u_{n+1} = f(n)$



## Nature d'une suite

Étudier la **nature** d'une suite revient à déterminer si elle est **convergente** ou **divergente**. On a donc deux situations de suites **divergentes** :

- soit la suite admet une limite infinie (ex :  $u_n = n$ )
- soit la suite n'admet pas de limite (ex :  $v_n = (-1)^n$ )

## 2) Suites de la forme $u_{n+1} = f(n)$

Toutes les opérations sur les limites de fonctions s'appliquent pour les suites :

### Propriété - Limite de $u_n + v_n$

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	$l$	$+\infty$	$-\infty$
$l'$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	<b>FI</b>
$-\infty$	$-\infty$	<b>FI</b>	$-\infty$

Convergence de suites  
quelconques

Définitions

Suites de la forme  
 $u_{n+1} = f(n)$

Limites et majoration

Convergence de suites  
monotones

Convergence de suites  
particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et  
linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

Le principe de dichotomie

Convergence de suites  
récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est  
convergente ou divergente

Trouver un point fixe.

## Propriété - Limite de $u_n \times v_n$

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	$l \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l' \neq 0$	$l \times l'$	0	$\sigma(l').\infty$	$-\sigma(l').\infty$
0	0	0	FI	FI
$+\infty$	$\sigma(l).\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\sigma(l).\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

Convergence de suites  
quelconques

Définitions

Suites de la forme  
 $u_{n+1} = f(n)$

Limites et majoration

Convergence de suites  
monotones

Convergence de suites  
particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et  
linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

Le principe de dichotomie

Convergence de suites  
récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est  
convergente ou divergente

Trouver un point fixe.

## Propriété - Limite de $u_n \times v_n$

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	$l \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l' \neq 0$	$l \times l'$	0	$\sigma(l').\infty$	$-\sigma(l').\infty$
0	0	0	FI	FI
$+\infty$	$\sigma(l).\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\sigma(l).\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

## Propriété - Limite de $\frac{u_n}{v_n}$

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	$l \neq 0$	$l = 0$	$\infty$
$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$	0	$\infty$
0	$\infty$	FI	$\infty$
$\infty$	0	0	FI



Déterminer la limite de la suite définie par  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 2$  et

$$\forall n \geq 2, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

## Propriété - Croissances comparées

- Pour tout réel  $a > 0$  et pour tout réel  $b > 0$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(n))^b}{n^a} = 0$$

- Pour tout réel  $a > 0$  et pour tout réel  $q \in ]-1; 1[$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a q^n = 0$$

- Pour tout réel  $a > 0$  et pour tout réel  $|q| > 1$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{q^n} = 0$$

### 3) Limites et majoration



*Est-ce qu'une suite convergente est bornée, Est-ce qu'une suite bornée est convergente ?*

Convergence de suites  
quelconques

Définitions

Suites de la forme

$$u_{n+1} = f(n)$$

Limites et majoration

Convergence de suites  
monotones

Convergence de suites  
particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et  
linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

Le principe de dichotomie

Convergence de suites  
récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est  
convergente ou divergente

Trouver un point fixe.

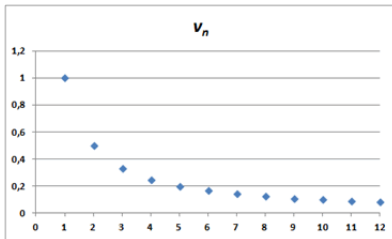
### 3) Limites et majoration



*Est-ce qu'une suite convergente est bornée, Est-ce qu'une suite bornée est convergente ?*

**Théorème -**

**Toute suite convergente est bornée.**



La suite  $u_n = 1/n$

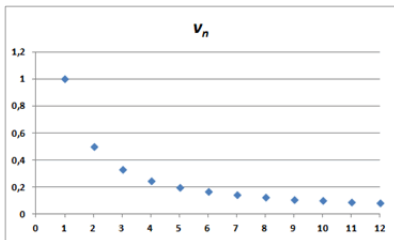
### 3) Limites et majoration



*Est-ce qu'une suite convergente est bornée, Est-ce qu'une suite bornée est convergente ?*

**Théorème -**

**Toute suite convergente est bornée.**



La suite  $u_n = 1/n$



**Remarque :** La réciproque est fausse. Il existe des suites bornées non convergente.



*Donner un contre-exemple pour la réciproque*

Convergence de suites  
quelconques

Définitions

Suites de la forme  
 $u_{n+1} = f(n)$

**Limites et majoration**

Convergence de suites  
monotones

Convergence de suites  
particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et  
linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

Le principe de dichotomie

Convergence de suites  
récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est  
convergente ou divergente

Trouver un point fixe.



*Que se passe-t-il lorsque  $u_n \leq v_n$  ?*



Que se passe-t-il lorsque  $u_n \leq v_n$  ?

## Théorème - Passage à l'inégalité dans les limites

On considère deux suites  $u$  et  $v$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0$ ,  
 $u_n \leq v_n$  (les termes de la suite  $u$  sont inférieurs à ceux de la suite  
 $v$  à partir d'un certain rang.)

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$  alors  $l \leq l'$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .



Que se passe-t-il lorsque  $u_n \leq v_n$  ?

## Théorème - Passage à l'inégalité dans les limites

On considère deux suites  $u$  et  $v$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0$ ,  
 $u_n \leq v_n$  (les termes de la suite  $u$  sont inférieurs à ceux de la suite  
 $v$  à partir d'un certain rang.)

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$  alors  $\ell \leq \ell'$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .



**Remarque :** Si on passe à la limite dans une inégalité stricte,  
celle-ci devient large.



Exercice 3

Convergence de suites  
quelconques

Définitions

Suites de la forme  
 $u_{n+1} = f(n)$

**Limites et majoration**

Convergence de suites  
monotones

Convergence de suites  
particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et  
linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

Le principe de dichotomie

Convergence de suites  
récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est  
convergente ou divergente

Trouver un point fixe.



*Quel théorème vient ensuite ?*



## Quel théorème vient ensuite ?

### Théorème - des gendarmes

Soient  $u$ ,  $v$  et  $w$  trois suites telles que, à partir d'un certain rang  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Si  $u$  et  $w$  converge vers la même limite  $\ell$  alors  $v$  converge et sa limite est  $\ell$ .



## Quel théorème vient ensuite ?

### Théorème - des gendarmes

Soient  $u$ ,  $v$  et  $w$  trois suites telles que, à partir d'un certain rang  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Si  $u$  et  $w$  converge vers la même limite  $\ell$  alors  $v$  converge et sa limite est  $\ell$ .

### Corollaire

Soient  $u$  et  $v$  deux suites,  $\ell$  un réel,  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tels que  $\forall n \geq n_0$ ,  $|u_n - \ell| \leq v_n$ . Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$



## Exercice 4

## 4) Convergence de suites monotones



*On a vu qu'une suite bornée n'est pas convergente. Mais que dire, si elle est en plus monotone ?*

## 4) Convergence de suites monotones



*On a vu qu'une suite bornée n'est pas convergente. Mais que dire, si elle est en plus monotone ?*

### Théorème - Convergence monotone

- Toute suite **croissante** et **majorée** est convergente
- Toute suite **décroissante** et **minorée** est convergente

## 4) Convergence de suites monotones



*On a vu qu'une suite bornée n'est pas convergente. Mais que dire, si elle est en plus monotone ?*

### Théorème - Convergence monotone

- Toute suite **croissante** et **majorée** est convergente
- Toute suite **décroissante** et **minorée** est convergente

### Théorème -

Toute suite croissante non majorée a pour limite  $+\infty$ . Toute suite décroissante non minorée a pour limite  $-\infty$ .

## 4) Convergence de suites monotones



*On a vu qu'une suite bornée n'est pas convergente. Mais que dire, si elle est en plus monotone ?*

### Théorème - Convergence monotone

- Toute suite **croissante** et **majorée** est convergente
- Toute suite **décroissante** et **minorée** est convergente

### Théorème -

Toute suite croissante non majorée a pour limite  $+\infty$ . Toute suite décroissante non minorée a pour limite  $-\infty$ .

### Théorème - Borne des suites monotones

- Si  $u$  est une suite croissante de limite  $l$ . Alors, pour tout entier  $n$ , on a  $u_n \leq l$ .
- Si  $u$  est une suite décroissante de limite  $l$ . Alors, pour tout entier  $n$ , on a  $u_n \geq l$ .



### Exercice 5

## II - Convergence de suites particulières

### 1) Suites arithmétiques

$u$  est une suite arithmétique de raison  $r$  alors :  $u_{n+1} = u_n + r$



*Que dire de la convergence de la suite  $u$  ?*

## II - Convergence de suites particulières

### 1) Suites arithmétiques

$u$  est une suite arithmétique de raison  $r$  alors :  $u_{n+1} = u_n + r$



*Que dire de la convergence de la suite  $u$  ?*

#### Propriété - Convergence des suites arithmétiques

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_0$

- si  $r = 0$  , la suite  $(u_n)$  est constante et converge vers  $u_0$
- si  $r > 0$  , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- si  $r < 0$  , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$



*Démonstration*

Convergence de suites  
quelconques

Définitions

Suites de la forme

$$u_{n+1} = f(n)$$

Limites et majoration

Convergence de suites  
monotones

Convergence de suites  
particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et  
linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

Le principe de dichotomie

Convergence de suites  
récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est  
convergente ou divergente

Trouver un point fixe.

## 2) Suites géométriques et linéaire d'ordre 1 ou 2



*Convergence de  $u_n = q^n$  ?*

## 2) Suites géométriques et linéaire d'ordre 1 ou 2



*Convergence de  $u_n = q^n$  ?*

### Propriété - Convergence de $q^n$

Soit  $q$  un nombre réel. Alors la suite  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

- converge vers 0 si et seulement si  $-1 < q < 1$  c'est à dire  $|q| < 1$ .

## 2) Suites géométriques et linéaire d'ordre 1 ou 2



*Convergence de  $u_n = q^n$  ?*

### Propriété - Convergence de $q^n$

Soit  $q$  un nombre réel. Alors la suite  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

- converge vers 0 si et seulement si  $-1 < q < 1$  c'est à dire  $|q| < 1$ .
- converge vers 1 si et seulement si  $q = 1$ .

Convergence de suites  
quelconques

Définitions

Suites de la forme

$$u_{n+1} = f(n)$$

Limites et majoration

Convergence de suites  
monotones

Convergence de suites  
particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et  
linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

Le principe de dichotomie

Convergence de suites  
récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est  
convergente ou divergente

Trouver un point fixe.

## 2) Suites géométriques et linéaire d'ordre 1 ou 2



*Convergence de  $u_n = q^n$  ?*

### Propriété - Convergence de $q^n$

Soit  $q$  un nombre réel. Alors la suite  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

- converge vers 0 si et seulement si  $-1 < q < 1$  c'est à dire  $|q| < 1$ .
- converge vers 1 si et seulement si  $q = 1$ .
- diverge vers  $+\infty$  si et seulement si  $q > 1$ .

Convergence de suites  
quelconques

Définitions

Suites de la forme

$$u_{n+1} = f(n)$$

Limites et majoration

Convergence de suites  
monotones

Convergence de suites  
particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et  
linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

Le principe de dichotomie

Convergence de suites  
récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est  
convergente ou divergente

Trouver un point fixe.

## 2) Suites géométriques et linéaire d'ordre 1 ou 2



*Convergence de  $u_n = q^n$  ?*

### Propriété - Convergence de $q^n$

Soit  $q$  un nombre réel. Alors la suite  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

- converge vers 0 si et seulement si  $-1 < q < 1$  c'est à dire  $|q| < 1$ .
- converge vers 1 si et seulement si  $q = 1$ .
- diverge vers  $+\infty$  si et seulement si  $q > 1$ .
- n'admet pas de limite si et seulement si  $q \leq -1$ .

Convergence de suites  
quelconques

Définitions

Suites de la forme

$$u_{n+1} = f(n)$$

Limites et majoration

Convergence de suites  
monotones

Convergence de suites  
particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et  
linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

Le principe de dichotomie

Convergence de suites  
récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est  
convergente ou divergente

Trouver un point fixe.

## 2) Suites géométriques et linéaire d'ordre 1 ou 2



Convergence de  $u_n = q^n$  ?

### Propriété - Convergence de $q^n$

Soit  $q$  un nombre réel. Alors la suite  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

- converge vers 0 si et seulement si  $-1 < q < 1$  c'est à dire  $|q| < 1$ .
- converge vers 1 si et seulement si  $q = 1$ .
- diverge vers  $+\infty$  si et seulement si  $q > 1$ .
- n'admet pas de limite si et seulement si  $q \leq -1$ .



**Remarque :** Pour étudier une suite géométrique  $v$  de raison  $q$ , il suffit d'appliquer ce théorème et de tenir compte de la valeur et du signe de  $v_0$  car,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = v_0 \times q^n$ .



Exercice 6

Convergence de suites  
quelconques

Définitions

Suites de la forme

$$u_{n+1} = f(n)$$

Limites et majoration

Convergence de suites  
monotones

Convergence de suites  
particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et  
linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

Le principe de dichotomie

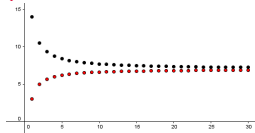
Convergence de suites  
récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est  
convergente ou divergente

Trouver un point fixe.

### 3) Suites adjacentes

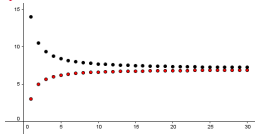


Suites adjacentes



*D'après le graphe ci-  
contre, comment définir  
deux suites adjacentes ?*

### 3) Suites adjacentes



Suites adjacentes



*D'après le graphe ci-contre, comment définir deux suites adjacentes ?*

#### Définition : suites adjacentes

Deux suites réelles  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites **adjacentes** si les trois conditions suivantes sont réunies :

- l'une est croissante,
- l'autre est décroissante,
- la suite  $w$  de terme général  $w_n = v_n - u_n$  converge vers 0.



#### Exercice 7

Convergence de suites  
quelconques

Définitions

Suites de la forme

$$u_{n+1} = f(n)$$

Limites et majoration

Convergence de suites  
monotones

Convergence de suites  
particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et  
linéaire d'ordre 1 ou 2

**Suites adjacentes**

Le principe de dichotomie

Convergence de suites  
récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est  
convergente ou divergente

Trouver un point fixe.



*Que dire de la convergence de deux suites adjacentes ?*



Que dire de la convergence de deux suites adjacentes ?

## Théorème - Suites adjacentes

Deux suites **adjacentes**  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  sont **convergentes** et ont la même limite  $\ell$  et vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$$

(dans le cas où  $(u_n)_n$  est croissante et  $(v_n)_n$  décroissante)



Que dire de la convergence de deux suites adjacentes ?

## Théorème - Suites adjacentes

Deux suites **adjacentes**  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  sont **convergentes** et ont la même limite  $\ell$  et vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$$

(dans le cas où  $(u_n)_n$  est croissante et  $(v_n)_n$  décroissante)



*Preuve en 3 étapes :*

- 1 On montre que  $u_n \leq v_n$  en étudiant la monotonie de  $w_n = v_n - u_n$ .
- 2 On montre que la suite  $(u_n)$  est majorée et que la suite  $(v_n)$  est minorée. On en déduit qu'elles convergent
- 3 On montre par l'absurde que la limite est la même.

## 4) Le principe de dichotomie

Convergence de suites  
quelconques

Définitions

Suites de la forme

$$u_{n+1} = f(n)$$

Limites et majoration

Convergence de suites  
monotones

Convergence de suites  
particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et  
linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

**Le principe de dichotomie**

Convergence de suites  
récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est  
convergente ou divergente

Trouver un point fixe.

## 4) Le principe de dichotomie

On se donne  $f$  une application strictement croissante et continue sur  $I = [a, b]$  avec  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$ .

Convergence de suites quelconques

Définitions

Suites de la forme

$$u_{n+1} = f(n)$$

Limites et majoration

Convergence de suites monotones

Convergence de suites particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

**Le principe de dichotomie**

Convergence de suites récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est convergente ou divergente

Trouver un point fixe.

## 4) Le principe de dichotomie

On se donne  $f$  une application strictement croissante et continue sur  $I = [a, b]$  avec  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$ .

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique  $\alpha$  tel que  $f(x) = 0$  sur l'intervalle  $[a; b]$ . On cherche une valeur approchée de  $\alpha$ .

Convergence de suites quelconques

Définitions

Suites de la forme

$u_{n+1} = f(n)$

Limites et majoration

Convergence de suites monotones

Convergence de suites particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

**Le principe de dichotomie**

Convergence de suites récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est convergente ou divergente

Trouver un point fixe.

## 4) Le principe de dichotomie

On se donne  $f$  une application strictement croissante et continue sur  $I = [a, b]$  avec  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$ .

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique  $\alpha$  tel que  $f(x) = 0$  sur l'intervalle  $[a; b]$ . On cherche une valeur approchée de  $\alpha$ .

Nous construisons deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in [a_n; b_n]$

Convergence de suites quelconques

Définitions

Suites de la forme

$u_{n+1} = f(n)$

Limites et majoration

Convergence de suites monotones

Convergence de suites particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

Le principe de dichotomie

Convergence de suites récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est convergente ou divergente

Trouver un point fixe.

## 4) Le principe de dichotomie

On se donne  $f$  une application strictement croissante et continue sur  $I = [a, b]$  avec  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$ .

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique  $\alpha$  tel que  $f(x) = 0$  sur l'intervalle  $[a; b]$ . On cherche une valeur approchée de  $\alpha$ .

Nous construisons deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in [a_n; b_n]$

- Initialisation : nous choisissons  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$

Convergence de suites quelconques

Définitions

Suites de la forme

$u_{n+1} = f(n)$

Limites et majoration

Convergence de suites monotones

Convergence de suites particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

Le principe de dichotomie

Convergence de suites récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est convergente ou divergente

Trouver un point fixe.

## 4) Le principe de dichotomie

On se donne  $f$  une application strictement croissante et continue sur  $I = [a, b]$  avec  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$ .

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique  $\alpha$  tel que  $f(x) = 0$  sur l'intervalle  $[a; b]$ . On cherche une valeur approchée de  $\alpha$ .

Nous construisons deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in [a_n; b_n]$

- Initialisation : nous choisissons  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$
- Supposons  $a_n$  et  $b_n$  calculés (alors  $f(a_n) \leq 0$  et  $f(b_n) \geq 0$ )

$$\text{Posons } c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Convergence de suites quelconques

Définitions

Suites de la forme

$u_{n+1} = f(n)$

Limites et majoration

Convergence de suites monotones

Convergence de suites particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

Le principe de dichotomie

Convergence de suites récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est convergente ou divergente

Trouver un point fixe.

## 4) Le principe de dichotomie

On se donne  $f$  une application strictement croissante et continue sur  $I = [a, b]$  avec  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$ .

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique  $\alpha$  tel que  $f(x) = 0$  sur l'intervalle  $[a; b]$ . On cherche une valeur approchée de  $\alpha$ .

Nous construisons deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in [a_n; b_n]$

- Initialisation : nous choisissons  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$
- Supposons  $a_n$  et  $b_n$  calculés (alors  $f(a_n) \leq 0$  et  $f(b_n) \geq 0$ )

$$\text{Posons } c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

- si  $f(c_n) \geq 0$  alors on pose  $\begin{cases} a_{n+1} & = a_n \\ b_{n+1} & = c_n \end{cases}$

## 4) Le principe de dichotomie

On se donne  $f$  une application strictement croissante et continue sur  $I = [a, b]$  avec  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$ .

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique  $\alpha$  tel que  $f(x) = 0$  sur l'intervalle  $[a; b]$ . On cherche une valeur approchée de  $\alpha$ .

Nous construisons deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in [a_n; b_n]$

- Initialisation : nous choisissons  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$
- Supposons  $a_n$  et  $b_n$  calculés (alors  $f(a_n) \leq 0$  et  $f(b_n) \geq 0$ )

$$\text{Posons } c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

- si  $f(c_n) \geq 0$  alors on pose  $\begin{cases} a_{n+1} &= a_n \\ b_{n+1} &= c_n \end{cases}$

- sinon, on pose :  $\begin{cases} a_{n+1} &= c_n \\ b_{n+1} &= b_n \end{cases}$

## 4) Le principe de dichotomie

On se donne  $f$  une application strictement croissante et continue sur  $I = [a, b]$  avec  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$ .

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique  $\alpha$  tel que  $f(x) = 0$  sur l'intervalle  $[a; b]$ . On cherche une valeur approchée de  $\alpha$ .

Nous construisons deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in [a_n; b_n]$

- Initialisation : nous choisissons  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$
- Supposons  $a_n$  et  $b_n$  calculés (alors  $f(a_n) \leq 0$  et  $f(b_n) \geq 0$ )

$$\text{Posons } c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

- si  $f(c_n) \geq 0$  alors on pose  $\begin{cases} a_{n+1} &= a_n \\ b_{n+1} &= c_n \end{cases}$
- sinon, on pose :  $\begin{cases} a_{n+1} &= c_n \\ b_{n+1} &= b_n \end{cases}$

Les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes et convergent vers  $\alpha$ .

# III - Convergence de suites récurrentes

Convergence de suites  
quelconques

Définitions

Suites de la forme

$$u_{n+1} = f(n)$$

Limites et majoration

Convergence de suites  
monotones

Convergence de suites  
particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et  
linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

Le principe de dichotomie

Convergence de suites  
récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est  
convergente ou divergente

Trouver un point fixe.

## III - Convergence de suites récurrentes

Dans cette partie, on s'intéresse à la nature des suites définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = a & (a \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} = f(u_n) & (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

où  $f$  est une fonction donnée.

### III - Convergence de suites récurrentes

Dans cette partie, on s'intéresse à la nature des suites définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = a & (a \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} = f(u_n) & (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

où  $f$  est une fonction donnée. On a donc :

$$u_0 = a ; u_1 = f(a) ; u_2 = f(u_1) \quad \text{etc}$$

### III - Convergence de suites récurrentes

Dans cette partie, on s'intéresse à la nature des suites définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = a & (a \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} = f(u_n) & (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

où  $f$  est une fonction donnée. On a donc :

$$u_0 = a ; u_1 = f(a) ; u_2 = f(u_1) \quad etc$$



En général, on ne sait pas exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  simplement. Nous allons tout de même pouvoir étudier la nature de ces suites à l'aide des différents théorèmes vus en cours.

### III - Convergence de suites récurrentes

Dans cette partie, on s'intéresse à la nature des suites définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = a & (a \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} = f(u_n) & (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

où  $f$  est une fonction donnée. On a donc :

$$u_0 = a ; u_1 = f(a) ; u_2 = f(u_1) \quad etc$$



En général, on ne sait pas exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  simplement. Nous allons tout de même pouvoir étudier la nature de ces suites à l'aide des différents théorèmes vus en cours.

#### Exemple - Suite récurrente -EML 1995

On considère la suite  $v$  définie par  $\begin{cases} v_0 \in ]0; e - 1[ \\ v_{n+1} = v_n \ln(1 + v_n) \end{cases}$



## Convergence de suites récurrentes

L'étude des suites de la forme  $u_{n+1} = f(u_n)$  se fait généralement en 3 temps (très souvent guidés par l'énoncé) :

- 1 Vérifier l'existence de la suite  $(u_n)$
- 2 Établir si la suite est **convergente** ou **divergente**.
- 3 si elle est convergente, rechercher les éventuels **points fixes** de la fonction afin de déterminer la limite.



## Convergence de suites récurrentes

L'étude des suites de la forme  $u_{n+1} = f(u_n)$  se fait généralement en 3 temps (très souvent guidés par l'énoncé) :

- 1 Vérifier l'existence de la suite  $(u_n)$
- 2 Établir si la suite est **convergente** ou **divergente**.
- 3 si elle est convergente, rechercher les éventuels **points fixes** de la fonction afin de déterminer la limite.

### 1) Existence de la suite

Au préalable, il faut s'assurer que la suite soit bien définie. Par exemple, la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n}$  n'est pas définie pour  $u_2$ .



## Convergence de suites récurrentes

L'étude des suites de la forme  $u_{n+1} = f(u_n)$  se fait généralement en 3 temps (très souvent guidés par l'énoncé) :

- 1 Vérifier l'existence de la suite  $(u_n)$
- 2 Établir si la suite est **convergente** ou **divergente**.
- 3 si elle est convergente, rechercher les éventuels **points fixes** de la fonction afin de déterminer la limite.

### 1) Existence de la suite

Au préalable, il faut s'assurer que la suite soit bien définie. Par exemple, la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n}$  n'est pas définie pour  $u_2$ .



### Vérifier l'existence de $(u_n)$

On montre par récurrence que la suite existe en même temps qu'une autre proposition, du type  $u_n > a$  pour  $a \in \mathbb{R}$ .



*Montrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n$  existe et  $v_n \in ]0; e - 1[$ .*

Convergence de suites  
quelconques

Définitions

Suites de la forme

$$u_{n+1} = f(n)$$

Limites et majoration

Convergence de suites  
monotones

Convergence de suites  
particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et  
linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

Le principe de dichotomie

Convergence de suites  
récurrentes

Existence de la suite

**Établir si la suite est  
convergente ou divergente**

Trouver un point fixe.

## 2) Établir si la suite est convergente ou divergente

Convergence de suites  
quelconques

Définitions

Suites de la forme

$$u_{n+1} = f(n)$$

Limites et majoration

Convergence de suites  
monotones

Convergence de suites  
particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et  
linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

Le principe de dichotomie

Convergence de suites  
récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est  
convergente ou divergente

Trouver un point fixe

## 2) Établir si la suite est convergente ou divergente



On va très souvent montrer la convergence d'une suite récurrente en :

- Utilisant le théorème de convergence monotone.



*Montrons que  $v_n$  est décroissante et minorée donc convergente.*

Convergence de suites  
quelconques

Définitions

Suites de la forme

$$u_{n+1} = f(n)$$

Limites et majoration

Convergence de suites  
monotones

Convergence de suites  
particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et  
linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

Le principe de dichotomie

Convergence de suites  
récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est  
convergente ou divergente

Trouver un point fixe

## 2) Établir si la suite est convergente ou divergente



On va très souvent montrer la convergence d'une suite récurrente en :

- Utilisant le théorème de convergence monotone.
- Utilisant le théorème des gendarmes.



*Montrons que  $v_n$  est décroissante et minorée donc convergente.*

Convergence de suites  
quelconques

Définitions

Suites de la forme

$$u_{n+1} = f(n)$$

Limites et majoration

Convergence de suites  
monotones

Convergence de suites  
particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et  
linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

Le principe de dichotomie

Convergence de suites  
récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est  
convergente ou divergente

Trouver un point fixe

## 2) Établir si la suite est convergente ou divergente



On va très souvent montrer la convergence d'une suite récurrente en :

- Utilisant le théorème de convergence monotone.
- Utilisant le théorème des gendarmes.
- Montrant que la suite et une autre sont adjacentes.



*Montrons que  $v_n$  est décroissante et minorée donc convergente.*

### 3) Trouver un point fixe.

Convergence de suites  
quelconques

Définitions

Suites de la forme

$$u_{n+1} = f(n)$$

Limites et majoration

Convergence de suites  
monotones

Convergence de suites  
particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et  
linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

Le principe de dichotomie

Convergence de suites  
récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est  
convergente ou divergente

Trouver un point fixe.

### 3) Trouver un point fixe.

#### Propriété -

Soit  $f$  une fonction ayant une limite finie  $\ell$  en  $x_0$  et  $u$  une suite convergant vers  $x_0$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

Convergence de suites quelconques

Définitions

Suites de la forme

$$u_{n+1} = f(n)$$

Limites et majoration

Convergence de suites monotones

Convergence de suites particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

Le principe de dichotomie

Convergence de suites récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est convergente ou divergente

Trouver un point fixe.

### 3) Trouver un point fixe.

#### Propriété -

Soit  $f$  une fonction ayant une limite finie  $\ell$  en  $x_0$  et  $u$  une suite convergeant vers  $x_0$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

**Application :** On en déduit le théorème suivant.

#### Théorème - Point fixe

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle fermé  $I$  et soit  $(u_n)$  une suite de termes appartenant à  $I$  vérifiant  $u_{n+1} = f(u_n)$ . On suppose que la suite  $(u_n)$  est convergente vers une limite  $\ell$ . On a alors nécessairement :

$$f(\ell) = \ell$$

Donc, **si la suite  $(u_n)$  admet une limite  $l$** , elle vérifiera obligatoirement la relation  $\ell = f(\ell)$ .



*Résolvons l'équation  $\ell = \ell \ln(1 + \ell)$  et trouvons la limite de*

*v.*

Convergence de suites quelconques

Définitions

Suites de la forme

$u_{n+1} = f(n)$

Limites et majoration

Convergence de suites monotones

Convergence de suites particulières

Suites arithmétiques

Suites géométriques et linéaire d'ordre 1 ou 2

Suites adjacentes

Le principe de dichotomie

Convergence de suites récurrentes

Existence de la suite

Établir si la suite est convergente ou divergente

Trouver un point fixe.