Chapitre 12: Polynômes

Savoir Faire:

- Pratiquer la division euclidienne de polynôme
- Factoriser un polynôme
- Utiliser l'identification.
- Calculer les limites de fractions rationnelles ou de polynômes.

Un polynôme est une expression mathématiques formée uniquement de produits et sommes de constantes ou d'inconnues. Cette caractéristique en fait des objets relativement simples à manipuler surtout quand il n'y a qu'une seule inconnue (souvent noté X). Vous les avez déjà manipulé

- Au collège :
  - Les fonctions constantes $P : x \to C$.
  - Les fonctions linéaires ou affines $P : x \to ax + b$.
- Au lycée :
  - Les trinômes du second degré $P : x \to ax^2 + bx + c$.
  - La fonction cube $P : x \to x^3$.

Un polynôme est une expression mathématiques formée uniquement de produits et sommes de constantes ou d'inconnues. Cette caractéristique en fait des objets relativement simples à manipuler surtout quand il n'y a qu'une seule inconnue (souvent noté X). Vous les avez déjà manipulé

- Au collège :
  - Les fonctions constantes $P : x \to C$.
  - Les fonctions linéaires ou affines $P : x \to ax + b$.
- Au lycée :
  - Les trinômes du second degré $P : x \to ax^2 + bx + c$.
  - La fonction cube $P : x \to x^3$.

I - Caractéristiques des polynômes

1) L'ensemble des polynômes

Un polynôme est une expression mathématiques formée uniquement de produits et sommes de constantes ou d'inconnues. Cette caractéristique en fait des objets relativement simples à manipuler surtout quand il n'y a qu'une seule inconnue (souvent noté X). Vous les avez déjà manipulé

- Au collège :
  - Les fonctions constantes $P : x \to C$.
  - Les fonctions linéaires ou affines $P : x \to ax + b$.
- Au lycée :
  - Les trinômes du second degré $P : x \to ax^2 + bx + c$.
  - La fonction cube $P : x \to x^3$.

I - Caractéristiques des polynômes

1) L'ensemble des polynômes

Définition : Polynôme

On appelle polynôme toute expression P de la forme

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

où $a_0, \cdots, a_n$ sont des réels donnés et n un entier naturel.

Définition : Fonction polynôme

- On appelle **fonction monôme** toute fonction *réelle* m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = ax^k$ où $a \in \mathbb{R}$ et k$\in \mathbb{N}$; a est le **coefficient** du monôme.

Définition : Fonction polynôme

- On appelle **fonction monôme** toute fonction *réelle* m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = ax^k$ où $a \in \mathbb{R}$ et k$\in \mathbb{N}$; a est le **coefficient** du monôme.
- On appelle polynôme ou fonction polynomiale toute fonction P

$$\begin{aligned} P :& \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

où $a_0, \cdots, a_n$ sont des réels donnés appelés **coefficients** du polynôme et n un entier naturel appelé **degré** du polynôme si $a_n \neq 0$. Par convention le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Définition : Fonction polynôme

- On appelle **fonction monôme** toute fonction *réelle* m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = ax^k$ où $a \in \mathbb{R}$ et k$\in \mathbb{N}$; a est le **coefficient** du monôme.
- On appelle polynôme ou fonction polynomiale toute fonction P

$$\begin{aligned} P : &\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \to a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

où $a_0, \cdots, a_n$ sont des réels donnés appelés **coefficients** du polynôme et n un entier naturel appelé **degré** du polynôme si $a_n \neq 0$. Par convention le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Remarque : L'objet Polynôme et la fonction polynôme sont très proche et sont souvent confondus

Définition : Fonction polynôme

- On appelle **fonction monôme** toute fonction *réelle* m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = ax^k$ où $a \in \mathbb{R}$ et k$\in \mathbb{N}$; a est le **coefficient** du monôme.
- On appelle polynôme ou fonction polynomiale toute fonction P

$$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

où $a_0, \cdots, a_n$ sont des réels donnés appelés **coefficients** du polynôme et n un entier naturel appelé **degré** du polynôme si $a_n \neq 0$. Par convention le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Remarque : L'objet Polynôme et la fonction polynôme sont très proche et sont souvent confondus

Remarque : Il ne faut pas confondre l'objet polynôme P ou $P(X)$ et sa valeur en $x \in \mathbb{R}$, $P(x)$.

Donner le degré des polynômes suivants : $P(x) = x^2 - 1$, $Q(x) = 1$ *et* $R(x) = -x^5 + 3x + 2$

Définition : Ensemble de polynômes

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Définition : Ensemble de polynômes

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Remarque :

- Un polynôme de degré 0 est aussi appelé fonction constante.
- Un polynôme de degré 1 est aussi appelé fonction affine.
- Un polynôme de degré 2 est aussi appelé trinôme du second degré.

Définition : Ensemble de polynômes

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Remarque :

- Un polynôme de degré 0 est aussi appelé fonction constante.
- Un polynôme de degré 1 est aussi appelé fonction affine.
- Un polynôme de degré 2 est aussi appelé trinôme du second degré.

Propriété - Inclusion d'ensemble de polynômes

$$\mathbb{R}_0[X] \subset \mathbb{R}_1[X] \subset \mathbb{R}_2[X] \subset \cdots \subset \mathbb{R}[X].$$

Donner des exemples de polynômes appartenant à $\mathbb{R}_5[X]$

2) Calculs avec des polynômes

Propriété - Calculs

Soit P et Q deux polynômes et λ un nombre réel :

- *La somme de P et de Q est le* ***polynôme*** *noté $P+Q$ et défini sur $\mathbb{R}$ par :* $(P+Q)(x) = P(x) + Q(x)$

2) Calculs avec des polynômes

Propriété - Calculs

Soit P et Q deux polynômes et λ un nombre réel :

- *La somme de P et de Q est le* ***polynôme*** *noté $P+Q$ et défini sur $\mathbb{R}$ par :* $(P+Q)(x) = P(x)+Q(x)$
- *Le produit de P par Q est le* ***polynôme*** *noté $P \cdot Q$ et défini sur $\mathbb{R}$ par :* $(P \cdot Q)(x) = P(x) \times Q(x)$

2) Calculs avec des polynômes

Propriété - Calculs

Soit P et Q deux polynômes et λ un nombre réel :

- *La somme de P et de Q est le* ***polynôme*** *noté $P+Q$ et défini sur $\mathbb{R}$ par : $(P+Q)(x)=P(x)+Q(x)$*
- *Le produit de P par Q est le* ***polynôme*** *noté $P \cdot Q$ et défini sur $\mathbb{R}$ par : $(P \cdot Q)(x)=P(x)\times Q(x)$*
- *Le produit du réel par P est le* ***polynôme*** *noté λP défini sur $\mathbb{R}$ par : $(\lambda P)(x)=\lambda\times P(x)$.*

2) Calculs avec des polynômes

Propriété - Calculs

Soit P et Q deux polynômes et λ un nombre réel :

- *La somme de P et de Q est le* ***polynôme*** *noté $P+Q$ et défini sur $\mathbb{R}$ par : $(P+Q)(x)=P(x)+Q(x)$*
- *Le produit de P par Q est le* ***polynôme*** *noté $P\cdot Q$ et défini sur $\mathbb{R}$ par : $(P\cdot Q)(x)=P(x)\times Q(x)$*
- *Le produit du réel par P est le* ***polynôme*** *noté λP défini sur $\mathbb{R}$ par : $(\lambda P)(x)=\lambda\times P(x)$.*
- Soit I un intervalle réel tel que, $\forall x\in I$, $Q(x)\neq 0$. Alors le quotient de P par Q est appelé **fraction rationnelle** et est noté $\dfrac{P}{Q}$. Elle est définie par , $\forall x\in I$, $\left(\dfrac{P}{Q}\right)(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Exercice 1

Propriété - Degré des polynômes

1. Le degré d'un polynôme constant non-nul est 0. Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.
2. $\deg(P+Q) \leq \max(degP, degQ)$
3. $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$

Propriété - Degré des polynômes

1. Le degré d'un polynôme constant non-nul est 0. Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.
2. $\deg(P+Q) \leq \max(degP, degQ)$
3. $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$

Définition : Dérivée d'un polynôme

Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X_{n-1} + \cdots + a^2 X^2 + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$.

1. On appelle polynôme dérivé de P et on le note P' le polynôme défini par
$P'(X) = n a_n X^{n-1} + (n-1) a_{n-1} X^{n-2} + \cdots + 2 a_2 X + a_1$
2. De même on note P'' ou $P^{(2)}$ si on dérive deux fois le polynôme P et plus généralement $P^{(k)}$ si on le dérive k fois.

Propriété - Degré des polynômes

1. Le degré d'un polynôme constant non-nul est 0. Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.
2. $\deg(P+Q) \leq \max(degP, degQ)$
3. $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$

Définition : Dérivée d'un polynôme

Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X_{n-1} + \cdots + a^2 X^2 + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$.

1. On appelle polynôme dérivé de P et on le note P' le polynôme défini par
$P'(X) = n a_n X^{n-1} + (n-1) a_{n-1} X^{n-2} + \cdots + 2a_2 X + a_1$
2. De même on note P'' ou $P^{(2)}$ si on dérive deux fois le polynôme P et plus généralement $P^{(k)}$ si on le dérive k fois.

Remarque : Lorsque deg(P) = n, on a deg(P') = n-1

Exercice 2

II - Identification de polynômes

1) Égalité de polynômes

II - Identification de polynômes

1) Égalité de polynômes

Théorème - Identification

Soient deux polynômes $P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X)=\sum_{k=0}^{m} b_k X^k$.

Alors $P=Q$ ssi

$$n=m \text{ et } \forall k\in [\![0;n]\!],\ a_k=b_k.$$

Ainsi, deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont même degré, et mêmes coefficients.

II - Identification de polynômes

1) Égalité de polynômes

Théorème - Identification

Soient deux polynômes $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$.

Alors $P = Q$ ssi

$$n = m \text{ et } \forall k \in [\![0; n]\!],\ a_k = b_k.$$

Ainsi, deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont même degré, et mêmes coefficients.

Exemple -

Soient $P(X) = 2X^2 + 3X - 1$ et $Q(X) = 2X^2 + aX - b$. Alors $P = Q$ si et seulement si $a = 3$ et $b = 1$.

Exercice 3

Corollaire

Un polynôme $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

2) Application de l'identification

2) Application de l'identification

Applications à la factorisation

(voir l'exercice 4) Pour résoudre un tel problème :

1. On développe la seconde expression du polynôme
2. On identifie chaque coefficient, ce qui donne un système
3. On résout le système.

Exercice 4

2) Application de l'identification

Applications à la factorisation

(voir l'exercice 4) Pour résoudre un tel problème :

1. On développe la seconde expression du polynôme
2. On identifie chaque coefficient, ce qui donne un système
3. On résout le système.

Exercice 4

Application aux fractions rationnelles

(voir l'exercice 5). Pour trouver a et b dans un tel problème

1. On met toutes les fractions au même dénominateur.
2. On additionne les numérateurs.
3. On identifie les polynômes au numérateur

Exercice 5

III - Racines de polynômes

1) Définition

III - Racines de polynômes

1) Définition

Définition : Racines d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est une racine de P ssi

$$P(a) = 0.$$

III - Racines de polynômes

1) Définition

Définition : Racines d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est une racine de P ssi

$$P(a) = 0.$$

Remarque : Le terme racine s'emploie exclusivement pour les polynômes. Dans le cas d'une fonction, on parlera des zéros de la fonction. Chercher les racines de P c'est résoudre $P(x) = 0$.

III - Racines de polynômes

1) Définition

Définition : Racines d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est une racine de P ssi

$$P(a) = 0.$$

Remarque : Le terme racine s'emploie exclusivement pour les polynômes. Dans le cas d'une fonction, on parlera des zéros de la fonction. Chercher les racines de P c'est résoudre $P(x) = 0$.

Définition : Factorisation

Soit P un polynôme et a un réel. On dit que P se factorise par $(X - a)$ (ou que $(X - a)$ divise P) s'il existe un polynôme Q tel que $P(X) = (X - a)Q(X)$.

Exercice 6

Remarque : Si P s'écrit $P(X) = (X-a)Q(X)$ alors

$$P(a) = (a-a)Q(a) = 0$$

donc a est racine de P. On a même une équivalence :

Remarque : Si P s'écrit $P(X) = (X - a)Q(X)$ alors

$$P(a) = (a - a)Q(a) = 0$$

donc a est racine de P. On a même une équivalence :

Théorème - Lien entre racine et divisibilité

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors a est une racine de P ssi P se factorise par $(X - a)$. Autrement dit, a est une racine de P ssi il existe un polynôme Q de degré $\deg(Q) = \deg(P) - 1$ tel que

$$P(X) = (X - a)Q(X).$$

Remarque : Si P s'écrit $P(X) = (X - a)Q(X)$ alors

$$P(a) = (a - a)Q(a) = 0$$

donc a est racine de P. On a même une équivalence :

Théorème - Lien entre racine et divisibilité

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors a est une racine de P ssi P se factorise par $(X - a)$. Autrement dit, a est une racine de P ssi il existe un polynôme Q de degré $\deg(Q) = \deg(P) - 1$ tel que

$$P(X) = (X - a)Q(X).$$

Exemple -

$P(x) = x^2 - 5x + 4$ se factorise par $(x - 1)$ et $(x - 4)$.

Remarque : Si P s'écrit $P(X) = (X - a)Q(X)$ alors

$$P(a) = (a - a)Q(a) = 0$$

donc a est racine de P. On a même une équivalence :

Théorème - Lien entre racine et divisibilité

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors a est une racine de P ssi P se factorise par $(X - a)$. Autrement dit, a est une racine de P ssi il existe un polynôme Q de degré $\deg(Q) = \deg(P) - 1$ tel que

$$P(X) = (X - a)Q(X).$$

Exemple -

$P(x) = x^2 - 5x + 4$ se factorise par $(x - 1)$ et $(x - 4)$.

Corollaire

Un polynôme de degré n a au plus n racines distinctes.

Démonstration du corollaire par l'absurde.

2) Racines d'un polynôme de degré 2

On cherche a trouver les racines du polynôme

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

2) Racines d'un polynôme de degré 2

On cherche a trouver les racines du polynôme

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

Racines d'un polynôme de degré 2

1. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
2. On regarde le cas correspondant :
   - Si $\Delta < 0$, le polynôme n'a pas de racines réelles.
   - Si $\Delta = 0$, le polynôme a une racine $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
   - Si $\Delta > 0$, le polynôme a 2 racines

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Déterminer les racines de $P(x) = x^2 + x - 2$.

3) Division Euclidienne

Remarque : Pour factoriser un polynôme dont on connait une racine, on peut utiliser la méthode de l'identification (exercice 5). Mais une méthode plus rapide existe. Il s'agit de poser une division euclidienne mais avec des polynômes.

3) Division Euclidienne

Remarque : Pour factoriser un polynôme dont on connait une racine, on peut utiliser la méthode de l'identification (exercice 5). Mais une méthode plus rapide existe. Il s'agit de poser une division euclidienne mais avec des polynômes.

Théorème - division euclidienne

Soient P et S deux polynômes tels que Q soit non nul. Alors il existe un unique couple de polynôme (Q, R) avec $\deg R < \deg S$ tels que

$$P = SQ + R$$

3) Division Euclidienne

Remarque : Pour factoriser un polynôme dont on connait une racine, on peut utiliser la méthode de l'identification (exercice 5). Mais une méthode plus rapide existe. Il s'agit de poser une division euclidienne mais avec des polynômes.

Théorème - division euclidienne

Soient P et S deux polynômes tels que Q soit non nul. Alors il existe un unique couple de polynôme (Q, R) avec $\deg R < \deg S$ tels que

$$P = SQ + R$$

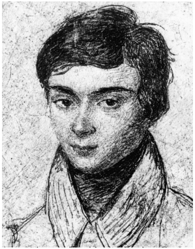
Exemple - Division euclidienne

Reprenons l'exemple de l'exercice 5. On a vu que $X^3 - X^2 - 4X + 4 = (X-2)(X^2 + X - 2)$

Exercice 7

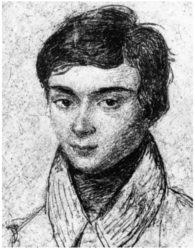
4) Racines d'un polynôme de degré plus grand que 2.

La recherche des racines des polynômes n'est pas faciles. Des formules (compliquées) ont été trouvées pour résoudre les polynômes de degré 3 ou 4. Il a fallu attendre le XIX^e siècle pour qu'un jeune mathématicien Français, Évariste Galois, montre qu'il était en fait impossible de trouver des formules génériques pour les polynômes de degré supérieur à 5.



4) Racines d'un polynôme de degré plus grand que 2.

La recherche des racines des polynômes n'est pas faciles. Des formules (compliquées) ont été trouvées pour résoudre les polynômes de degré 3 ou 4. Il a fallu attendre le XIX^e siècle pour qu'un jeune mathématicien Français, Évariste Galois, montre qu'il était en fait impossible de trouver des formules génériques pour les polynômes de degré supérieur à 5.



Trouver les racines d'un polynôme

1. Chercher une racine évidente α du polynôme P
2. Diviser le polynôme P par $X - \alpha$ (en utilisant l'identification ou la division euclidienne), c'est à dire $P = (X - \alpha)Q$.
3. Si le polynôme Q est de degré 2, utiliser la formule du discriminant. Sinon chercher une racine évidente pour Q.

Exercice 8

Comment trouver les solutions de l'équation

$$(e^x)^2 - 2e^x - 3 = 0 \quad ?$$

Comment trouver les solutions de l'équation

$$(e^x)^2 - 2e^x - 3 = 0 \quad ?$$

Par un changement de variable

1. Poser un changement de variable approprié (ici : $X = e^x$)
2. Résoudre l'équation en X (ici $X^2 - 2X - 3 = 0$)
3. Ne pas oublier de donner la solution x et non pas X (ici, on posera $x = \ln(X)$ si $X > 0$.)

Exercice 9

IV - Limites utilisant la factorisation

Comment déterminer la limite en $+\infty$ et $-\infty$ du polynôme

$$P(X) = X^3 - X^2 + 4\ ?$$

IV - Limites utilisant la factorisation

Comment déterminer la limite en $+\infty$ et $-\infty$ du polynôme

$$P(X) = X^3 - X^2 + 4\ ?$$

Limites d'un polynôme en $\pm\infty$

On met en facteur le terme de plus haut degré :

$$P(X) = X^3\left(1 - \frac{X^2}{X^3} + \frac{4}{X^3}\right) = X^3\left(1 - \frac{1}{X} + \frac{4}{X^3}\right).$$

On voit alors que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3 = \pm\infty$.

IV - Limites utilisant la factorisation

Comment déterminer la limite en $+\infty$ et $-\infty$ du polynôme

$$P(X) = X^3 - X^2 + 4\ ?$$

Limites d'un polynôme en $\pm\infty$

On met en facteur le terme de plus haut degré :

$$P(X) = X^3\left(1 - \frac{X^2}{X^3} + \frac{4}{X^3}\right) = X^3\left(1 - \frac{1}{X} + \frac{4}{X^3}\right).$$

On voit alors que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3 = \pm\infty.$

Théorème - Limite de polynôme

Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ d'un polynôme sont données par la limite du monôme de plus haut degré.

Exercice 10

Comment déterminer la limite en $+\infty$ et $-\infty$ de la fraction rationnelle

$$Q(X) = \frac{X^2 - 1}{X^2 + 3X - 2} \, ?$$

Comment déterminer la limite en $+\infty$ et $-\infty$ de la fraction rationnelle

$$Q(X) = \frac{X^2-1}{X^2+3X-2} \text{ ?}$$

Limites d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$

On met en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur :

$$Q(X) = \frac{X^2\left(1-\dfrac{1}{X^2}\right)}{X^2\left(1+\dfrac{3}{X}-\dfrac{2}{X^2}\right)}$$

On voit alors que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} Q(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$

Comment déterminer la limite en $+\infty$ et $-\infty$ de la fraction rationnelle

$$Q(X) = \frac{X^2-1}{X^2+3X-2} \ ?$$

Limites d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$

On met en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur :

$$Q(X) = \frac{X^2\left(1-\dfrac{1}{X^2}\right)}{X^2\left(1+\dfrac{3}{X}-\dfrac{2}{X^2}\right)}$$

On voit alors que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} Q(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1.$

Théorème - Limite de fraction rationnelle

Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ d'une fraction rationnelle sont données par la limite du quotient des monômes de plus haut degré.

Exercice 11

Rappel sur la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$

Indétermination $\dfrac{0}{0}$

- S'il s'agit d'une fraction rationnelle (ou assimilé)
  1. On cherche les racines du numérateur et du dénominateur.
  2. On factorise.
  3. On simplifie.
- Sinon, on regarde si c'est une limite connue.

Exercice 12