Chapitre 10: Systèmes d'équations linéaires

Savoir Faire:

- Résoudre un système d'équation linéaire
- Inverser une matrice
- Résoudre un système à paramètre.

Un troupeau est composé de dromadaires et de chameaux. On compte 90 têtes et 152 bosses. Combien y a-t-il d'animaux de chaque espèces ?

I - Système d'équation linéaire

1) Définition

Définition : Système d'équation

On appelle **système (S) de n équations linéaires à p inconnues** x_1**,** x_2**, ...,** x_p (ou encore système $n \times p$) tout système de la forme :

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

où les a_{ij} et b_i pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$ sont des réels donnés.

I - Système d'équation linéaire

1) Définition

Définition : Système d'équation

On appelle **système (S) de n équations linéaires à p inconnues** x_1**,** x_2**, ...,** x_p (ou encore système $n \times p$) tout système de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

où les a_{ij} et b_i pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$ sont des réels donnés. Lorsque tous les b_i sont nuls, on dit que le système (S) est **homogène** (ou sans second membre)

Exercice 1

Remarque :

- Tous les systèmes n'admettent pas une unique solution. Certains n'en admettent aucune, d'autres une infinité.

Remarque :

- Tous les systèmes n'admettent pas une unique solution. Certains n'en admettent aucune, d'autres une infinité.
- Résoudre un système revient à chercher les **p-uplets** $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de réels qui sont **solutions** du système, c'est à dire qui vérifient simultanément les n équations L_1, L_2, ..., L_n.

Remarque :

- Tous les systèmes n'admettent pas une unique solution. Certains n'en admettent aucune, d'autres une infinité.
- Résoudre un système revient à chercher les **p-uplets** $(x_1$, x_2, ..., $x_p)$ de réels qui sont **solutions** du système, c'est à dire qui vérifient simultanément les n équations L_1**,** L_2**, ...,** L_n**.**
- Tout système homogène admet au moins une solution, le p-uplet (0, 0, ..., 0).

Remarque :

- Tous les systèmes n'admettent pas une unique solution. Certains n'en admettent aucune, d'autres une infinité.
- Résoudre un système revient à chercher les **p-uplets** $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de réels qui sont **solutions** du système, c'est à dire qui vérifient simultanément les n équations L_1**,** L_2**, ...,** L_n**.**
- Tout système homogène admet au moins une solution, le p-uplet (0, 0, ..., 0).
- Le système dans la définition s'écrit plus simplement $AX = B$ où $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice et $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $B = (b_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont deux vecteurs colonnes.

Exercice 2

2) Système de Cramer

Qu'est-ce qu'un système carré ?

2) Système de Cramer

Qu'est-ce qu'un système carré ?

Définition : Système Carré

On dit qu'un système d'équation est carré d'ordre n s'il y a n équations et n inconnues.

2) Système de Cramer

Qu'est-ce qu'un système carré ?

Définition : Système Carré

On dit qu'un système d'équation est carré d'ordre n s'il y a n équations et n inconnues.

Remarque : L'écriture matricielle d'un système carré fait intervenir une matrice carré.

2) Système de Cramer

Qu'est-ce qu'un système carré ?

Définition : Système Carré

On dit qu'un système d'équation est carré d'ordre n s'il y a n équations et n inconnues.

Remarque : L'écriture matricielle d'un système carré fait intervenir une matrice carré.

Définition : Système de Cramer

Un système carré d'ordre n est de **Cramer** lorsqu'il possède un unique n-uplet solution.

Le système (S_1) de l'exercice 1 est-il de Cramer ?

Remarque : Un système homogène (S) de n équations linéaires à n inconnues est un système de Cramer si (S) admet la n-liste (0, 0, ..., 0) pour unique solution.

Lien entre système de Cramer et Matrices

Remarque : Un système homogène (S) de n équations linéaires à n inconnues est un système de Cramer si (S) admet la n-liste (0, 0, ..., 0) pour unique solution.

Lien entre système de Cramer et Matrices

Théorème - Système de Cramer

Un système d'équation $AX = B$ est de Cramer si et seulement la matrice A est inversible. Dans ce cas, l'unique solution est donnée par $X = A^{-1}B$.

Exercice 3

II - Résolution d'un système échelonné

Résoudre le système $\begin{cases} x+y &= 2 \\ y &= 1 \end{cases}$

II - Résolution d'un système échelonné

Résoudre le système $\begin{cases} x + y & = 2 \\ y & = 1 \end{cases}$

Définition : Système échelonné

On dit que le système (S) est **échelonné** lorsque
$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \forall j \in \{1, 2, ..., p\}, i > j \Rightarrow a_{ij} = 0.$
Il se présente alors sous la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n + ... + a_{1p}x_p & = b_1 \quad (L_1) \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n + ... + a_{2p}x_p & = b_2 \quad (L_2) \\ \qquad \qquad \ddots & \\ \qquad \qquad a_{nn}x_n + ... + a_{np}x_p & = b_n \quad (L_n) \end{cases}$$

II - Résolution d'un système échelonné

Résoudre le système $\begin{cases} x+y &= 2 \\ y &= 1 \end{cases}$

Définition : Système échelonné

On dit que le système (S) est **échelonné** lorsque
$\forall i \in \{1,\ 2, \dots, n\}, \forall j \in \{1,\ 2, \dots, p\}, i > j \Rightarrow a_{ij} = 0.$
Il se présente alors sous la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n + \dots + a_{1p}x_p &= b_1 \quad (L_1) \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n + \dots + a_{2p}x_p &= b_2 \quad (L_2) \\ \ddots & \\ a_{nn}x_n + \dots + a_{np}x_p &= b_n \quad (L_n) \end{cases}$$

Si **n=p,** un système échelonné est dit **triangulaire** et les coefficients $a_{i,i}$ sont appelés **pivots**

Exercice 4

Mettre sous forme matricielle le système triangulaire de l'exercice précédent. Que remarque-t-on ?

Mettre sous forme matricielle le système triangulaire de l'exercice précédent. Que remarque-t-on ?

Remarque : Un système d'équation $AX = B$ est triangulaire si et seulement si A est une matrice triangulaire supérieure.

Mettre sous forme matricielle le système triangulaire de l'exercice précédent. Que remarque-t-on ?

Remarque : Un système d'équation $AX = B$ est triangulaire si et seulement si A est une matrice triangulaire supérieure.

La résolution de systèmes échelonnés est simple (nous allons voir dans la suite de cette partie les différents types de systèmes échelonnés et comment exprimer leurs solutions.
Mais comment faire quand le système n'est pas échelonné ?
On se ramènera à un système échelonné à l'aide d'une méthode calculatoire appelée pivot de Gauss (partie III)

1) Cas d'un système de n équations à n inconnues

On est dans cette situation la :

$$(S)\left\{\begin{array}{rll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n & = b_1 & (L_1) \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n & = b_2 & (L_2) \\ \ddots & & \\ a_{nn}x_n & = b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

1) Cas d'un système de n équations à n inconnues

On est dans cette situation la :

$$(S)\left\{\begin{array}{rll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n & = b_1 & (L_1) \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n & = b_2 & (L_2) \\ \ddots & & \\ a_{nn}x_n & = b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

Résolution d'un système échelonné

- Si tous les a_{ii} (les pivots) sont non nuls alors les équations, en partant de la dernière, permettent de calculer successivement x_n, x_{n-1}, ..., x_1. Cela donne un système de Cramer.
- Si un des pivot est nul alors soit 2 équations sont les mêmes (cf cas 3), soit le système est incompatible, c'est à dire $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exercice 5

2) Cas où $n > p$

Remarque : On est dans le cas où l'on a plus d'équations que d'inconnues.

Exercice 6

$$(S_8)\ :\ \begin{cases} 2x+y=4 \\ y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \qquad (S_9)\ :\ \begin{cases} x+2y=3 \\ x=1 \\ x+y=2 \end{cases}$$

2) Cas où $n > p$

Remarque : On est dans le cas où l'on a plus d'équations que d'inconnues.

Exercice 6

$$(S_8)\ :\ \begin{cases} 2x+y=4 \\ y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \qquad (S_9)\ :\ \begin{cases} x+2y=3 \\ x=1 \\ x+y=2 \end{cases}$$

Plus d'équations que d'inconnues

On résout le système formé de par les p premières équations et s'il a des solutions, on remplace x_1, x_2, ...,x_p dans les n-p équations restantes, afin de vérifier si elles sont compatibles avec les p premières équations.

Résoudre l'exercice

3) Cas où $n < p$

Remarque : On est dans le cas où l'on a moins d'équations que d'inconnues (on aura dans ce cas toujours une infinité de solutions)

Exercice 7

$$(S_{10}) \; : \; \begin{cases} x + y + z = 2 \\ \quad\quad y + 3z = 0 \end{cases} \qquad (S_2) \; : \; \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ \quad\quad 2y - z = 1 \end{cases}$$

3) Cas où $n < p$

Remarque : On est dans le cas où l'on a moins d'équations que d'inconnues (on aura dans ce cas toujours une infinité de solutions)

Exercice 7

$$(S_{10}) \ : \ \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \qquad (S_2) \ : \ \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

Plus d'inconnues que d'équations

Dans le cas d'un système de n équations à p inconnues : x_1, x_2, ...,x_p avec $n < p$:

1. On choisit $p - n$ inconnues que l'on fixe comme des paramètres : $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_p$.
2. On résout le système de n équations à n inconnues $x_1, \ldots, x_n$ en fonction des paramètres fixés.

Résoudre l'exercice

III - Résolution d'un système quelconque

1) Opérations élémentaires

Définition : Opérations élémentaires

Soit (S) un système $n \times p$. On désigne par **opération élémentaire** l'une des trois opérations suivantes :

III - Résolution d'un système quelconque

1) Opérations élémentaires

Définition : Opérations élémentaires

Soit (S) un système $n \times p$. On désigne par **opération élémentaire** l'une des trois opérations suivantes :

- L'échange de deux équations par exemple l'échange de la $i^{ième}$ équation (ou ligne) L_i et de la $j^{ième}$ équation (ou ligne) L_j que l'on note $L_i \leftrightarrow L_j$.

III - Résolution d'un système quelconque

1) Opérations élémentaires

Définition : Opérations élémentaires

Soit (S) un système $n \times p$. On désigne par **opération élémentaire** l'une des trois opérations suivantes :

- L'échange de deux équations par exemple l'échange de la $i^{ième}$ équation (ou ligne) L_i et de la $j^{ième}$ équation (ou ligne) L_j que l'on note $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Le remplacement d'une équation par l'un de ses multiples non nul par exemple, si α un réel non nul, le remplacement de la $i^{ième}$ ligne L_i par la ligne αL_iet on note $L_i \leftarrow \alpha L_i$.

III - Résolution d'un système quelconque

1) Opérations élémentaires

Définition : Opérations élémentaires

Soit (S) un système $n \times p$. On désigne par **opération élémentaire** l'une des trois opérations suivantes :

- L'échange de deux équations par exemple l'échange de la $i^{ième}$ équation (ou ligne) L_i et de la $j^{ième}$ équation (ou ligne) L_j que l'on note $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Le remplacement d'une équation par l'un de ses multiples non nul par exemple, si α un réel non nul, le remplacement de la $i^{ième}$ ligne L_i par la ligne αL_iet on note $L_i \leftarrow \alpha L_i$.
- Le remplacement d'une équation par la somme de cette équation et d'un multiple d'une autre équation du système par exemple, si α un réel, le remplacement de la $i^{ième}$ ligne L_i par la ligne $L_i + \alpha L_j$ et on note $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

Exercice 8

Théorème - Opérations élémentaires sur les systèmes

Tout système obtenu à partir d'un système (S) en transformant l'une de ses équations à l'aide des opérations élémentaires est **équivalent** à (S).

Remarque : Toute autre opération est INTERDITE.

Théorème - Opérations élémentaires sur les systèmes

Tout système obtenu à partir d'un système (S) en transformant l'une de ses équations à l'aide des opérations élémentaires est **équivalent** à (S).

Remarque : Toute autre opération est INTERDITE.

2) Méthode du pivot de Gauss

Pivot de Gauss

1. Éliminer l'inconnue x_1 de toutes les équations à partir de la ligne 2. Si $a_{11} \neq 0$, alors on fait faire

Exercice 9

Théorème - Opérations élémentaires sur les systèmes

Tout système obtenu à partir d'un système (S) en transformant l'une de ses équations à l'aide des opérations élémentaires est **équivalent** à (S).

Remarque : Toute autre opération est INTERDITE.

2) Méthode du pivot de Gauss

Pivot de Gauss

1. Éliminer l'inconnue x_1 de toutes les équations à partir de la ligne 2. Si $a_{11} \neq 0$, alors on fait faire

$$L_i \leftarrow a_{11} L_i - a_{1i} L_1$$

2. Recommencer cette opération pour éliminer x_2 à partir de la ligne 3 et ainsi de suite jusqu'à avoir un système échelonné.

Exercice 9

Quand-est-ce que le système sera de Cramer ?

Quand-est-ce que le système sera de Cramer ?

Théorème - Système de Cramer et Pivot de Gauss

Un système (S) carré d'ordre n est de **Cramer** si et seulement si la méthode du pivot de Gauss fait apparaitre n pivots successifs non nuls.

Quand-est-ce que le système sera de Cramer ?

Théorème - Système de Cramer et Pivot de Gauss

Un système (S) carré d'ordre n est de **Cramer** si et seulement si la méthode du pivot de Gauss fait apparaitre n pivots successifs non nuls.

Remarque :

On peut tout à fait avant de démarrer la méthode, échanger des lignes ou décider de d'abord éliminer x_2 ou x_3 avant d'éliminer x_1. Avec l'expérience vous devinerez le choix adéquat pour résoudre le plus simplement le système.
En effet il est toujours plus simple d'avoir 1 en coefficient à la première ligne de la première inconnue que l'on veut éliminer.

Exercice 10

3) Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche à savoir si A est inversible et si oui à calculer son inverse.

3) Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche à savoir si A est inversible et si oui à calculer son inverse.

Calcul par résolution d'un système

1. Résoudre le système $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. A est inversible ?

Calcul de l'inverse de A et Exercice 11

3) Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche à savoir si A est inversible et si oui à calculer son inverse.

Calcul par résolution d'un système

1. Résoudre le système $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. A est inversible ?
2. Traduire le résultat trouvé à l'étape 1 sous forme d'égalité matricielle et en déduire A^{-1}

Calcul de l'inverse de A et Exercice 11

Propriété - Calcul de l'inverse par opérations élémentaires

Supposons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est inversible alors on peut trouver un **nombre fini d'opérations élémentaires** qui transforment A en I_n matrice identité. En appliquant ces mêmes *opérations élémentaires* dans le **même ordre** à la matrice I_n , la matrice obtenue est A^{-1}.

Propriété - Calcul de l'inverse par opérations élémentaires

Supposons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est inversible alors on peut trouver un **nombre fini d'opérations élémentaires** qui transforment A en I_n matrice identité. En appliquant ces mêmes *opérations élémentaires* dans le **même ordre** à la matrice I_n , la matrice obtenue est A^{-1}.

Calcul de l'inverse par opération élémentaire

On va mener les calculs avec la matrice à inverser à gauche et la matrice identité à droite en écrivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer les calculs puis Exercice 12.