Questions de cours

Exercice 1 (Support de V.A.)
On lance 2 dés à 6 faces équilibrées, on note X la variable aléatoire associée à la somme des deux dés. Décrivez $X(\Omega)$ et calculer $P(X=2)$ et $P(X\geq 3)$.

Exercice 2 (Loi de probabilité)

(a) On lance une pièce de monnaie équilibrée et on note X la variable aléatoire valant 0 si on obtient face et 1 si on obtient pile.

(b) On lance un dé à 6 faces équilibré et on note Y la variable aléatoire correspondant au numéro obtenu sur le dé.

(c) On lance 2 dés à 6 faces équilibrés muni de la variable aléatoire Z correspondant au chiffre maximum obtenu par les 2 dés.

Donner la loi de probabilité de chacune de ces variables aléatoire.

Exercice 3 (Espérance)
On reprend les variables aléatoires de l'exercice précédent. Donner l'espérance de X, Y et Z.

Exercice 4 (Formule de transfert)
On reprend les variable aléatoire X, Y et Z. Calculer $E(X^2)$, $E(Y^2)$ et $E(Z^2)$.

Exercice 5 (Variance)
On reprend les variables aléatoires de l'exercice 3. Calculer la variance de X, Y et de Z.

Exercice 6 (Loi certaine)
On considère une urne U contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirage avec remise dans l'urne U. On note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $E(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Déterminer la loi de la variable aléatoire Z_1 et la loi de la variable aléatoire Z_2. En déduire $E(Z_1)$ et $E(Z_2)$.

Exercice 7 (Loi uniforme)
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$. Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

Exercice 8 (Loi uniforme)
Pour $b>a$ deux entiers, on définit la loi uniforme Y sur $\llbracket a,b\rrbracket$ par :

$$\forall k\in\llbracket a,b\rrbracket,\quad P(Y=k)=\frac{1}{b-a+1}.$$

(a) Montrer que $Y=X+a-1$ où $X\hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$ et $n=b-a+1$.

(b) En déduire $E(Y)$ et $Var(Y)$.

Exercice 9 (Loi de Bernoulli)
Soit $X\hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Retrouver $E(X)$ et $Var(X)$ à l'aide de la définition.

Exercice 10 (Loi de Bernoulli)
Pour chacune des expériences suivantes, déterminer s'il s'agit de lois de Bernoulli et le cas échéant donner son paramètre p :

(a) On tire une boule d'une urne contenant 7 boules rouges et 3 boules vertes. X est la variable aléatoire qui vaut 1 si on tire une boule rouge et 0 si on tire une boule verte.

(b) On lance un dé à 10 faces. X est la variable aléatoire qui vaut 1 si le nombre obtenu est inférieur ou égal à 10 et 0 sinon.

(c) On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. X est la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on tire un valet ou une dame et 0 sinon.

(d) On tire une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue.

(e) On tire 12 dés à 10 faces et on X la variable aléatoire qui compte le nombre de dé affichant 6.

Exercice 11 (Loi binomiale)
Montrer que la loi binomiale de paramètre (n,p) est bien une loi de probabilité.

Exercice 12 (Loi Binomiale)
Dans chacun des cas suivants, déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

(a) On tire 4 fois une boule d'une urne contenant 7 boules rouges et 3 boules vertes. A chaque tirage, on replace la boule tirée dans l'urne et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de boules rouges tirées.

(b) On tire 10 fois une pièces de monnaie truqué, ayant 1 chance sur 4 de faire pile. X est la variable aléatoire comptant le nombre de pile obtenue.

(c) On suppose que Harry P. a une chance sur 100 de récupérer une lettre. Et qu'il a reçu 500 lettres. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lettre récupéré.

Déterminer la loi d'une VA discrète finie, son espérance et sa variance

Exercice 13
On considère une variable aléatoire X prenant les valeurs 0,1,2 ou 3. On donne

$$P(X=0)=\frac{1}{10} \quad \text{et} \quad P(X=1)=\frac{1}{2}.$$

(a) Sachant que les événements $(X=2)$ et $(X=3)$ sont équiprobables, déterminer $P(X=2)$ et $P(X=3)$.

(b) Donner la loi de X, puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 14 (*)
On joue au jeu suivant : On parie sur un nombre compris entre 1 et 6 puis on lance 3 dés et on gagne 3 € si le nombre sort 3 fois, 2 € s'il ne sort que 2 fois et 1 € s'il sort une fois. On perd 1 euro s'il ne sort pas. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable X représentant le gain du joueur.

Exercice 15 (*)
On pioche successivement deux boules, sans remettre la première boule, dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5. On note X la valeur absolue de la différence des deux numéros obtenus.

Donner $X(\Omega)$ et la loi de X. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 16 (**)
Soient $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$. On considère la VA X à valeurs dans $\{0,\cdots,n\}$telle que $\forall k \in \{0,\cdots,n\}, P(X=k)=a\binom{n}{k}$

(a) Déterminer a pour que l'on définisse bien une loi de probabilité.

(b) (i) Montrer que $\forall k \in \{1,\cdots,n\}, k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$.

(ii) En déduire $E(X)$.

Reconnaître une loi usuelle

Exercice 17
On lance 20 fois une pièce ayant la probabilité p de faire pile. Dans les cas suivants, déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

(a) On note X le nombre de pile obtenue.

(b) On note X la variable aléatoire valant 1 si l'on a que des piles et 0 sinon.

(c) On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers.

(d) On gagne 2 euros si on obtient plus de piles que de face. On perd 2 euro sinon et on perd 1 euro en cas de match nul. On note X le gain.

Exercice 18 (*)
Une grenouille monte les marches d'un escalier (supposé infini) en partant du sol et en sautant :

— Ou bien une seule marche avec la probabilité p.

— Ou bien 2 marches avec la probabilité $1-p$.

On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

(a) Dans cette question, on observe n sauts de la grenouille et on note X_n le nombre de fois ou la grenouille a sauté une marche. Quelle est la loi de X_n

(b) On note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de marches franchies. Exprimer Y_n en fonction de X_n. En déduire l'espérance et la variance de Y_n.

Exercice 19 (**)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$. On considère n joueurs visant une cible. Chacun des joueurs effectue 2 tirs. A chaque tir, chaque joueur à la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.

(a) Pour tout $1 \leq i \leq n$, X_i est la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur i a touché sa cible au premier tir et 0 sinon. Quels sont les variables aléatoires X_i ?

(b) On pose $X = X_1 + \ldots + X_n$. Que représente la variable aléatoire X ? Déterminer la loi de X.

(c) On note Z la VA égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des 2 tirs. Montrer que Z suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

(d) On pose la VA $Y = Z - X$. Que représente Y ? Déterminer la loi de Y ?