Questions de cours

Exercice 1 (Limites usuelles (1))
Donner les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$

Exercice 2 (Position par rapport à l'asymptote)
Déterminer la position de la fonction $f : x \to \exp(1/x)$ par rapport à son asymptote horizontale $y = 1$.

Exercice 3 (Limites usuelles (2))
Donner les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$ (e) $\lim\limits_{x\to+\infty} |x|$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$ (d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)$ (f) $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|$

Exercice 4 (Limites usuelles (3))
Donner les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x}$ (b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x}$ (c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \sqrt{x}$ (d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln(x)$

Exercice 5 (Limite de fonctions définies sur des intervalles)
Étudier la limite en 0 des fonctions suivantes :

(a) f définie par $\begin{cases} f(x) = 0 & si\ x \geq 0 \\ f(x) = e^{1/x} & si\ x < 0 \end{cases}$ (b) h définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \frac{1}{|x|}$.

Exercice 6 (Limites avec des puissances)
Donner les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\pi$ (b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^{-2,4}$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \pi^x$ (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (0,43)^x$

Exercice 7 (Somme de limites)
Donner les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \ln x$ (b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} + e^x$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 3x$ (d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln(x) - \frac{1}{x}$

Exercice 8 (Produit de limites)
Donner les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x\ln x$ (b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} -(5+x)\ln x$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) e^{-x}$

Exercice 9 (Quotient de limites)
Donner les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{\ln x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+x^2}{2-x^3}$ (c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln(x)}{x}$

Exercice 10 (Limites composée)
Donner les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ (b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$

Exercice 11 (Croissances comparées)
Donner les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{(\ln x)^3}$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^{3x}}$ (d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^{94}}{x}$

Exercice 12 (Croissances comparées(2))
Donner les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^2}}{3x}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x+1}$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4}$

Exercice 13 (Indétermination(1))
Donner les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^5+x^3-2x^2$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x^2$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-2}-\sqrt{x}$

Exercice 14 (Indétermination(2))
Donner les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}x$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}}$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-1)\ln(x)$

Exercice 15 (Indétermination(3))
Donner les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-4x}{3x^3+2}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{x^2}-1}$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2e^x}{x^3+x+1}$

Exercice 16 (Indétermination(4))
Donner les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-x}{x^2+x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}-2e^x+1}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ (d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{\sqrt{x}}{e^x-1}$

Exercice 17 (Passage à la limite)
f est une fonction définie sur $]0;+\infty[$ telle que :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{x^2}.$$

(a) Peut-on en déduire la limite de f en 0^+ ?
(b) Peut-on en déduire la limite de f en 2 ?
(c) Peut-on en déduire la limite de f en $+\infty$?

Exercice 18 (Théorème d'encadrement)
Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

Utilisation des théorèmes d'encadrement, étude de fonctions

Exercice 19 (théorème des gendarmes)
On cherche à démontrer le résultat de cours suivant :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

.

(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1+x \leqslant e^x \leqslant 1+xe^x$.
(b) En déduire un encadrement de $\dfrac{e^x-1}{x}$ et retrouver ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$.

Exercice 20 (*)
Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 + x\exp\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.

(a) Préciser l'ensemble de définition de f .

(b) Calculer les limites à gauche et à droite en 1 de f.
Possède-t-elle une limite en 1 ?

(c) Déterminer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.

(d) A l'aide d'un changement de variable convenable, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\exp\left(\dfrac{1}{1-x}\right)-1\right)$

Exercice 21 (**)
Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{3}{|x|}}, \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

(a) Montrer que f est une fonction impaire.

(b) Montrer que : $\forall x \neq 0,\ f'(x) = e^{-\frac{3}{|x|}}\left(1+\frac{3}{|x|}\right)$.

(c) Dresser le tableau de variations de la fonction f

(d) Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition.

Exercice 22 (***)
On définit la fonction partie entière E par : $\forall x \in \mathbb{R}, E[x] = n$ où n est l'unique entier tel que $n \leq x < n+1$.
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bornée sur tout intervalle de longueur 1.

(a) On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x)) = 0$.
On se fixe $\epsilon > 0$.
   (i) Montrer qu'il existe $A \geq 0$ tel que $\forall x \geq A$, $|f(x+1)-f(x)| \leq \epsilon$.
   (ii) On pose $m = E[x-A]$. Montrer que $|f(x)-f(x-m)| \leq m\epsilon$.
   (iii) En déduire que $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{M}{x}+\epsilon$, où M est un majorant de $|f|$ sur $[A, A+1]$.
   (iv) Montrer que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$.

(b) On suppose que $\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x)) = l \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = l$.

(c) Retrouver la valeur de $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$.